

الدرس 10

الأعداد المركبة (قسم أول)

تقديم

ندرس كيف أنه من دراسة حل المعادلات اضطررنا إلى توسيع مفهوم مجموعات الأعداد.
- المعادلة $x+2=0$ ليس لها حلول في \mathbb{N} وهذا ما قادنا إلى إنشاء مجموعة جديدة أوسع \mathbb{N} بحيث تصبح للمعادلة $x+2=0$ حلول في هذه المجموعة والتي نرمز لها \mathbb{Z} .
- المعادلة $2x+3=0$ ليس لها حلول في \mathbb{Z} وهذا ما قادنا إلى إنشاء مجموعة جديدة أوسع \mathbb{Z} بحيث تكون للمعادلة $2x+3=0$ حلول في هذه المجموعة التي نرمز لها \mathbb{Q} .
- المعادلة $x^2=-1$ ليس لها حلول في \mathbb{R} لذلك لجأنا إلى إنشاء مجموعة أوسع \mathbb{R} بحيث تكون لمعادلتنا حلول في هذه المجموعة الجديدة.

خطرت لبعض الرياضيين فكرة تعريف أعداد ليست حقيقية واعطاء معنى لـ $\sqrt{-1}$ وفي منتصف القرن الثامن عشر (1777) اقترح العالم "اولر" استبدال $\sqrt{-1}$ بـ i حيث i يمثل الحرف الأول من كلمة "imaginaire" إذن $i^2=-1$.

العالم "دالمبار" بين أن كل عناصر المجموعة الجديد هي من الشكل $a+ib$ مع a و b عددين حقيقيين والتي تسمى مجموعة الأعداد المركبة (Complexe) و يرمز لها بـ \mathbb{C} .
- كما مثلنا كل مجموعة الأعداد الحقيقية على مستقيم نستطيع تمثيل الأعداد الحقيقية والمركبة في مستوي بحيث أن كل نقطة منه تحدد بفاصلتها a وترتيبها b والتي تمثل العدد $a+ib$ وهذا المستوي يسمى بالمستوي المركب.

أكثر من دراجتين غير صالحة.
(ب) يريد هذا التاجر أن يكون احتمال الحصول على الأقل على دراجة غير صالحة أصغر من 50% . عين عندئذ القيمة الأعظمية للعدد n حيث n عدد الدراجات التي يستطيع طلبها.
4- المتغير العشوائي الذي يرفق بكل دراجة منتجة مدة حياتها بالأعوام يتبع قانونا أسيا وسيطه 0,0007 أي دالة كثافة احتماله المعروفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ :
 $f(x) = 0,0007 \times e^{-0,0007x}$

احسب احتمال أن تكون مدة حياتها محصورة بين 500 و 600 يوم بتقريب 10^{-2}

32 - دراسة حول عدد تدخلات الحماية المدنية أجريت خلال مدة 200 أسبوع. وهذا لغرض معرفة أكثر الأيام دخلا. نتائجها في الجدول التالي :

الجمعة	الخميس	الأربعاء	الثلاثاء	الاثنين	الأحد	السبت
26	23	30	39	29	27	26

هل نستطيع بعتبة مجازفة 10% القول أن هناك تساوي احتمال في عدد التدخلات بين أيام الأسبوع ؟ لهذا الغرض استعملنا نتائج 6000 محاكاة لتجربة تتمثل في اختيار يوم من الأسبوع عشوائيا خلال 200 أسبوع.

D_1	D_2	Me	Q_3	Q_1
0,0015	0,0015	0,0025	0,0061	0,0072

ولكل محاكاة حسينا قيمة d^2 .
السلسلة الإحصائية لـ d^2 نتائجها مدونة في الجداول التالي :
ماذا تستنتج ؟

33 - نرمي 60 مرة حجر النرد.
(1) عين التواترات التحصل عليها لكل وجه باستعمال قانون تساوي الاحتمال
(2) رمينا حجر النرد 60 مرة على التتابع فتحصلنا على النتائج التالية :

وجه الحجر	1	2	3	4	5	6
التكرار	13	8	9	10	7	13

احسب d^2 مجموع مربعات الفروق بين التواترات النظرية والتواترات الملاحظة .
(3) بمحاكاة التجربة السابقة (رمي حجر النرد 60 مرة) 1000 و 2000 مرة حسبنا لكل محاكاة قيمة d^2 فكانت النتائج هي :

عدد المرات	1000	2000
D_1	0,16665	0,16665

ماذا يمكن القول حول هذا الحجر (هل هو مغشوش أم لا ؟) .

1. مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C}

نعرف مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، تمديدا لمجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} ، الزودة بعمليتي الجمع والضرب اللتين لهما نفس الخواص كما في \mathbb{R} .

a و b عددين حقيقيين، المستوي الزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر (O, \vec{OI}, \vec{OJ}) يسمى بالمستوي المركب.

I و J نقطتان إحداثيتاهما $(1, 0)$ و $(0, 1)$ على الترتيب.

1.1 نقط المستوي والأعداد المركبة

تعريف 1

نرفق النقطة I بالعدد الحقيقي 1 ونرفق النقطة J بالعدد المركب i بحيث $i^2 = -1$.

نرفق بكل نقطة M إحداثياتها (a, b) من المستوي المركب العدد المركب الوحيد الذي نرسم له Z والذي يكتب $Z = a + ib$

عكسيا نرفق بكل عدد مركب $Z = a + ib$ النقطة M الوحيدة من المستوي المركب التي إحداثياتها (a, b)

ونقول عندئذ أنه يوجد تقابل بين مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ومجموعة نقاط المستوي.

تسمية

نسمي النقطة $M(a, b)$ صورة العدد المركب Z ويسمى بالاحقة النقطة M ونرمز له بـ Z_M

تعريف 2

نرفق بكل شعاع $\vec{OM}(a, b)$ العدد المركب $Z = a + ib$ والذي يسمى لاحقة هذا الشعاع وعكسيا نرفق بكل عدد مركب $Z = a + ib$ الشعاع الذي مركباته (a, b) والذي يسمى شعاع الصورة لـ Z ويرمز له بـ \vec{Z}_{OM}

مثال -

- (1) لتكن الأعداد المركبة Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 حيث $Z_1 = 2, Z_2 = 3i, Z_3 = 1 - i, Z_4 = -2 - 3i$ ولتكن M_1, M_2, M_3, M_4 صورها على الترتيب. مثل هذه النقط في المستوي المركب.
- (2) اعط الأعداد المركبة المثلثة بالنقطتين $M_5(3, 6)$ و $M_6(-1, 5 + 3i)$

الحل

$$(1) \quad M_3(1, -1), M_1(2, 0) \\ M_4(-2, -3), M_2(0, 3)$$

$$(2) \quad \text{العدد المركب الممثل لـ } M_5 \text{ هو } Z_5 = 3 + 6i \\ \text{العدد المركب الممثل لـ } M_6 \text{ هو } Z_6 = -1 + 3i$$

1.2 الشكل الجبري لعدد مركب

تعريف

الكتابة $Z = a + ib$ لعدد مركب حيث a و b عددين حقيقيين تسمى الشكل الجبري (أو الديكارتي) لـ Z .

a يسمى الجزء الحقيقي لـ Z ونرمز له بـ $\text{Re}(z)$

b يسمى الجزء التخيلي لـ Z ونرمز له بـ $\text{Im}(z)$

القول أن العدد المركب Z حقيقي يعني أن $\text{Im}(z) = 0$

القول أن العدد المركب Z تخيلي صرف يعني أن $\text{Re}(z) = 0$

محور القواصل يمثل مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} .

محور الترتيب يمثل مجموعة الأعداد التخيلية الصرفة.

نقول عن عددين مركبين أنهما متساويان إذا كانا ممثلين بنفس النقطة أي لهما نفس الجزء الحقيقي ونفس الجزء التخيلي.

$$a + ib = d + ib' \text{ يكافئ } a = d' \text{ و } b = b'$$

$$a + ib = 0 \text{ يكافئ } a = 0 \text{ و } b = 0$$

3.1 قواعد الحساب في \mathbb{C}

Z و Z' عددين مركبين بحيث $Z = a + ib$ و $Z' = a' + ib'$

$$(1) \quad Z + Z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

$$(2) \quad Z \times Z' = (a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

$$(3) \quad (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

$$(4) \quad Z^2 + Z'^2 = (Z - iZ')(Z + iZ')$$

$$(5) \quad \text{و إذا كان } Z \neq 0 \text{ فإن مقلوب العدد } Z \text{ هو } \frac{1}{Z} \text{ بحيث } \frac{1}{Z} = \frac{1}{a + ib}$$

في الشكل الجبري لعدد مركب لا يسمح بترك i في المقام ولكتابة $\frac{1}{Z}$ على الشكل الجبري

$$\Rightarrow \frac{1}{Z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \text{ فنجد } a - ib$$

$$(6) \quad \text{من أجل } Z' \neq 0 \text{ يكون } \frac{Z'}{Z} = (a + ib) \times \frac{1}{a + ib}$$

تمرين تدريبي 1

عين العددين الحقيقيين x و y بحيث $(x+2y)+i(x-3y)-2 \dots\dots\dots (1)$

الحل

المساواة (I) تكتب بالصيغة $(x+2y)+i(x-3y) = 2+i \times 0$

وهذه الأخيرة تكافئ $\begin{cases} x+2y=2 & (1) \\ x-3y=0 & (2) \end{cases} \dots\dots\dots (II)$

من (2) نجد $x=3y$ نعوض x في (1) نجد $5y=2$ ومنه $y=\frac{2}{5}$

إذن $x=\frac{6}{5}$ وبالتالي $(x,y) = (\frac{6}{5}, \frac{2}{5})$

تمرين تدريبي 2

اكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة $Z_1 = \frac{1}{i}$ ، $Z_2 = 1+3i-(2-4i)$ ، $Z_3 = \frac{2+i}{-1+3i}$ ، $Z_4 = (5-2i)^2$

الحل

$$Z_1 = \frac{1}{i} = \frac{-i \times 1}{0^2 + 1^2} = \frac{-i}{1} = -i$$

$$Z_2 = 1+3i-2-4i = (1-2)+(3-4)i = -1-i$$

$$Z_3 = 25-20i+4i^2 = 25-20i-4 = 21-20i$$

$$Z_4 = (2+i) \times \frac{-1-3i}{(-1)^2 + 3^2} = (2+i) \times \frac{-1-3i}{10} = \frac{(2+i)(-1-3i)}{10} = \frac{-2-6i-i-3i^2}{10}$$

$$= \frac{-2-7i+3}{10} = \frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$$

تمرين تدريبي 3

ليكن $z = x+iy$ و $Z = \frac{z-i}{z+i}$ حيث z عدد مركب يختلف عن $-i$

(1) عين الشكل الجبري لـ Z

(2) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث Z حقيقي

(3) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث Z تخيلي صرف

الحل

$$Z = \frac{x+iy-i}{x+iy+i} = \frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)} = \frac{[x+i(y-1)][x-i(y+1)]}{x^2+(y+1)^2} \quad (1)$$

$$= \frac{[x^2+(y+1)(y-1)]+i[-x(y+1)+x(y-1)]}{x^2+(y+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2} + i \frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$$

(2) Z حقيقي هذا معناه ان $\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2} = 0$ اي $-2x = 0$ و $x^2+(y+1)^2 \neq 0$

اي $x=0$ و $(x,y) \neq (0,-1)$

ومنه مجموعة النقط M بحيث Z حقيقي هي المستقيم ذو المعادلة $x=0$ ما عدا النقطة $A(0,-1)$

(3) Z تخيلي صرف هذا معناه ان $\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2} = 0$

اي $x^2+y^2-1=0$ و $(x,y) \neq (0,-1)$

ومنه مجموعة النقط M بحيث Z تخيلي صرف هي دائرة مركزها $O(0,0)$ ونصف قطرها $r=1$ ما عدا النقطة $A(0,-1)$

2. اللواحق والهندسة

Z_A و Z_B لاحقاً النقطتين A و B على الترتيب. $Z_{\vec{AB}}$ لاحقة الشعاع \vec{AB}

$Z_{\vec{u}}$ ، $Z_{\vec{v}}$ لاحقتي الشعاعين \vec{u} ، \vec{v} على الترتيب و k عدد حقيقي

لدينا ،

$$Z_{\vec{AB}} = Z_B - Z_A \quad (أ)$$

$$Z_{\vec{u}+\vec{v}} = Z_{\vec{u}} + Z_{\vec{v}} \quad (ب)$$

$$Z_{k\vec{u}} = k Z_{\vec{u}} \quad (ج)$$

(د) لتكن I منتصف القطعة $[AB]$ و G مخرج الجملة $\{(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma)\}$

$$Z_G = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha + \beta + \gamma} \quad \text{و} \quad Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$$

المرهان

$$(أ) \text{ الشعاع } \vec{AB} \text{ مركباته هي } \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

إذن ،

$$Z_{\vec{AB}} = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A)$$

$$= (x_B + iy_B) - (x_A + iy_A) = Z_B - Z_A$$

(ب) و (ج) و (د) ترهن بنفس الكيفية السابقة.

تمرين تدريبي 1

نعطى ثلاث نقاط A, B, C لواحقتها $1+2i, 3+2i, 3+5i$ على الترتيب.

- ما هي لواحق الشعاعين \vec{BA}, \vec{BC} ؟
- عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع.

الحل

$$\vec{Z}_{BA} = z_A - z_B = 1+2i - 3-2i = -2 \quad (1)$$

$$\vec{Z}_{BC} = z_C - z_B = 3+5i - 3-2i = 3i$$

$$ABCD \text{ متوازي اضلاع يعني أن } \vec{DC} = \vec{AB} \text{ أي } \vec{Z}_{DC} = \vec{Z}_{AB} \text{ أي } z_C - z_D = z_B - z_A \quad (2)$$

$$\text{ومنه نستنتج } 3+5i - z_D = 2 \text{ إذن } z_D = 1+3i$$

تمرين تدريبي 2

لتكن A, B, C, A', B', C' نقاط من المستوي لواحقتها على التوالي :

$$5+i, 4-i, 3i, 4+i, 3+3i, 2-i$$

- بين أن $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = \vec{0}$
- بين أن مركزي ثقل المثلثين $ABC, A'B'C'$ متطابقان.

الحل

$$\vec{Z}_{AA'} = z_{A'} - z_A = -2+4i \quad (1)$$

$$\vec{Z}_{BB'} = z_{B'} - z_B = 1-4i$$

$$\vec{Z}_{CC'} = z_{C'} - z_C = 1$$

$$\text{لاحقة الشعاع } \vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} \text{ هي } (-2+4i) + (1-4i) + 1 = 0 \text{ أي } 0$$

$$\text{وعليه } \vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = \vec{0}$$

- لتكن G مركز ثقل ABC و G' مركز الثقل $A'B'C'$

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{9+3i}{3} = 3+i$$

$$z_{G'} = \frac{z_{A'} + z_{B'} + z_{C'}}{3} = \frac{9+3i}{3} = 3+i$$

بما أن $z_G = z_{G'}$ فإن النقطة G متطابقة على G' .

3. مرافق عدد مركب

1.3 تعريف

مرافق العدد المركب $Z = a+ib$ مع a و b عدنان حقيقيان، هو العدد المركب الذي نرمز له بـ \bar{Z} والعرف بـ $\bar{Z} = a-ib$ ويقرأ " Z بار "

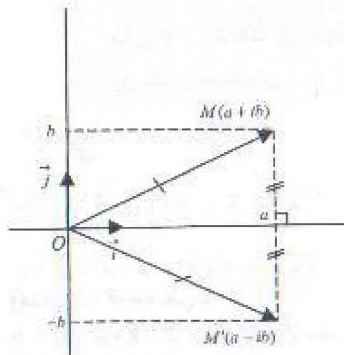
التفسير الهندسي

النقطة M' ذات اللاحقة $\bar{Z} = a-ib$

هي نظيرة النقطة M ذات اللاحقة $Z = a+ib$

بالنسبة إلى محور القواصل.

مثال .



مرافق $1+i$ هو $1-i$

مرافق $-i$ هو i

مرافق $-1-3i$ هو $-1+3i$

مرافق 2 هو 2

نتائج

Z' و Z عدنان مركبان

$$(1) \quad Z = Z' \text{ يكافئ } \bar{\bar{Z}} = Z$$

$$(2) \quad Z = \bar{\bar{Z}} \text{ (مرافق مرافق } Z \text{ هو } Z)$$

$$(3) \quad \text{إذا كان } Z = a+ib \text{ و } a \text{ و } b \text{ عدنان حقيقيان فإن } Z + \bar{Z} = 2a \text{ و } Z - \bar{Z} = 2bi$$

$$\text{أي } Z + \bar{Z} = 2\text{Re}(Z) \text{ و } Z - \bar{Z} = 2i\text{Im}(Z)$$

$$(4) \quad Z = \bar{Z} \text{ حقيقي يكافئ } Z = \bar{Z}$$

$$Z + \bar{Z} = 0 \text{ تخيلي صرف يكافئ } Z + \bar{Z} = 0$$

$$(5) \quad \text{إذا كان } Z = a+ib \text{ فإن } Z\bar{Z} = a^2+b^2$$

2.3 خواص

$$(1) \quad \overline{Z+Z'} = \bar{Z} + \bar{Z'} \text{ أي مجموع مرافقيهما}$$

$$(2) \quad \overline{Z \cdot Z'} = \bar{Z} \times \bar{Z'} \text{ أي جداء مرافقيهما}$$

$$(3) \quad \text{مرافق حاصل قسمة عددين مركبين هو حاصل قسمة مرافقيهما}$$

$$\text{أي } \overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)} = \frac{\bar{Z}}{\bar{Z'}} \text{ مع } Z' \neq 0$$

الإثبات

ليكن $Z = a+ib$ و $Z' = a'+ib'$ عدنان مركبان

$$\overline{Z+Z'} = \overline{(a+a') + i(b+b')} = (a+a') - i(b+b')$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 3x + 2 = 0 \\ (y=0) \text{ أو } (x = \frac{-3}{2}) \end{cases} \text{ وهذا يعني}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 3x + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ومنه نستنتج} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 - 3x + 2 = 0 \\ x = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{\frac{17}{4}} \text{ أو } y = -\sqrt{\frac{17}{4}} \\ x = \frac{-3}{2} \end{cases} \text{ يكافئ} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 - 3x + 2 = 0 \\ x = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ تكافئ} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 - 3x + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1) \text{ أو } (x=2) \\ y = 0 \end{cases} \text{ تكافئ}$$

إذن المعادلة المعطاة لها أربعة حلول هي $Z_1 = \frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}i$ ، $Z_2 = \frac{-3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}i$ ، $Z_3 = 1$ و $Z_4 = 2i$

4. طولية عدد مركب

تعريف

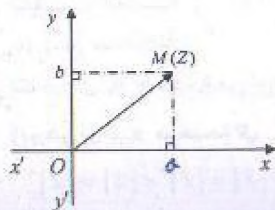
إذا كانت M صورة العدد المركب Z فإن الطول OM أي $|\vec{OM}|$ يسمى طولية العدد

المركب Z والتي نرمز لها بـ $|Z|$.

إذا كان $Z = a + ib$ مع a و b عددين حقيقيين فإن طولية العدد Z هو العدد الحقيقي

الموجب أو العدم المعروف بـ $|Z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ أو $|Z| = \sqrt{Z\bar{Z}}$.

مثال -



$$|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

$$|3 + 2i| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$|3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$|2| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$$

$$|-2| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$$

$\overline{(a - ib)} = (a + ib) = \bar{Z}$
نبرهن (ب) و (ج) بنفس الكيفية السابقة.

ملاحظة

نتائج الخاصية السابقة تمتد إلى مجموع « حدا أو حياء » عاملا وبالأخص $(\bar{Z}^n) = (\bar{Z})^n$

تمرين تدريبي 1

ليكن Z و Z' عددين مركبين حيث $Z = \frac{2+i}{1-i}$ و $Z' = \frac{2-i}{1+i}$
بين بدون حساب أن $Z + Z'$ حقيقي و $Z - Z'$ تخيلي صرف.

الحل

$$\bar{Z} = \overline{\left(\frac{2+i}{1-i}\right)} = \frac{2-i}{1+i} = Z'$$

$$\overline{Z + Z'} = \bar{Z} + \bar{Z}' = Z' + Z = Z + Z$$

ومنه $Z + Z'$ حقيقي

$$\overline{Z - Z'} + Z - Z' = \bar{Z} - \bar{Z}' + Z - Z' = Z' - Z + Z - Z' = 0$$

ومنه $Z - Z'$ تخيلي صرف.

تمرين تدريبي 2

حل المعادلتين ذواتي المجهول Z التاليتين :

$$(I) \quad 3\bar{Z} + 2 - i = -i\bar{Z} - 1$$

$$(II) \quad Z^2 - 3\bar{Z} + 2 = 0$$

الحل

$$(I) \text{ المعادلة } (I) \text{ تكافئ } 3Z + 2 + i = iZ - 1 \text{ بنقل المجاهيل إلى طرف والمعالم إلى طرف نجد،}$$

$$Z = \frac{3+i}{i-3} \text{ ومنه } (i-3)Z = 2+i+1$$

$$Z = \frac{3+i}{-3+i} \times \frac{-3-i}{-3-i} = \frac{(-9+1) + i(-3-3)}{(-3)^2 + (-1)^2} = \frac{-8 - 6i}{10} = \frac{-4}{5} - \frac{3}{5}i$$

(ب) بوضع $Z = x + iy$ حيث x و y عددين حقيقيين :

$$(x + iy)^2 - 3(x - iy) + 2 = 0 \text{ المعادلة المعطاة تكافئ}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 3x + 2 = 0 \\ y(2x + 3) = 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x^2 - y^2 - 3x + 2 = 0 \\ 2xy + 3y = 0 \end{cases}$$

وهذه الأخيرة تكافئ

خواص

(1) من أجل كل نقطتين A و B لاحقتاهما Z_A و Z_B على الترتيب

$$Z_A \times \overline{Z_B} = |Z_A|^2 \quad \text{و} \quad |\overline{Z_A}| = |Z_A| \quad \text{و} \quad |Z_B - Z_A| = AB$$

لدينا $\vec{u} = \left\| \frac{Z_B - Z_A}{|Z_B - Z_A|} \right\|$ من أجل كل شعاع \vec{u}

$$(2) \quad |Z| = 0 \text{ يكافئ } Z = 0$$

$$(3) \quad |Z + Z'| \leq |Z| + |Z'|$$

$$(4) \quad |Z \cdot Z'| = |Z| \cdot |Z'|$$

(5) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $|Z^n| = (|Z|)^n$

(6) من أجل $Z' \neq 0$ لدينا $\left| \frac{Z}{Z'} \right| = \frac{|Z|}{|Z'|}$ و $\left| \frac{1}{Z'} \right| = \frac{1}{|Z'|}$

الإثبات

(1) ليكن $\vec{OM} = \vec{AB}$ و M لاحقتها Z_A و Z_B

$$AB = |Z_B - Z_A| \quad \text{هذا معناه أن} \quad AB = OM$$

$$\text{إذا كان } Z_A = a + ib \quad \text{فإن} \quad \overline{Z_A} = a - ib$$

$$|\overline{Z_A}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |Z_A|$$

(2) $|Z| = 0$ يكافئ $OM = O$ أي M منطبقة على O وعليه $Z = 0$

(3) M و N نقطتان لاحقتاهما Z و Z'

حسب المتباينة الثلاثية لدينا $NM \leq OM + ON$

$$\text{لكن } NM = |Z - (-Z')| = |Z + Z'| \quad \text{و} \quad OM = |Z| \quad \text{و} \quad ON = |Z'|$$

$$\text{وعليه } |Z + Z'| \leq |Z| + |Z'|$$

$$(4) \quad |Z \times Z'|^2 = (Z \times Z') \times (\overline{Z \times Z'}) = Z \times Z' \times \overline{Z} \times \overline{Z'} = (Z \times \overline{Z})(Z' \times \overline{Z'}) = |Z|^2 \times |Z'|^2$$

$$\text{بما أن الطويلة عدد حقيقي موجب فإنه من المساواة} \quad |Z \times Z'|^2 = |Z|^2 \times |Z'|^2$$

$$\text{نستنتج } |Z \times Z'| = |Z| \times |Z'|$$

(5) نبرهن على هذه المساواة بالتراجع على n

$$\text{نسمي } p_n \text{ الخاصية } |Z^n| = |Z|^n$$

صحيحتان p_1 و p_0

نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $|Z^n| = |Z|^n$

$$\text{ونبرهن أن } p_{n+1} \text{ صحيحة أي } |Z^{n+1}| = |Z|^{n+1}$$

$$|Z^{n+1}| = |Z^n \times Z| = |Z^n| \times |Z| = |Z|^n \times |Z| = |Z|^{n+1}$$

ومنه p_{n+1} صحيحة

ومنه p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

$$(6) \quad \text{إذا كان } Z Z' = 1 \quad \text{فإن} \quad |Z| \times |Z'| = 1$$

$$\text{وهذا يعني } |Z'| = \frac{1}{|Z|} \quad \text{أي} \quad \left| \frac{1}{Z} \right| = \frac{1}{|Z|}$$

$$\left| \frac{Z}{Z'} \right| = \left| Z \times \frac{1}{Z'} \right| = |Z| \times \left| \frac{1}{Z'} \right| = \frac{|Z|}{|Z'|}$$

تمرين تدريبي

عبر طويلة كل عدد مركب من الأعداد التالية :

$$-5i, (2+5i)(7-8i), (3+4i)^5, \frac{3}{(2-i)^3}, \frac{1+3i}{-1-3i}$$

✓ الحل

$$|-5i| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|(2+5i)(7-8i)| = |2+5i| |7-8i| = \sqrt{29} \times \sqrt{113}$$

$$|(3+4i)^5| = |3+4i|^5 = (\sqrt{9+16})^5 = 5^5 = 3125$$

$$\left| \frac{3}{(2-i)^3} \right| = \frac{|3|}{|(2-i)^3|} = \frac{3}{|2-i|^3} = \frac{3}{(\sqrt{5})^3} = \frac{3}{5\sqrt{5}}$$

$$\left| \frac{1+3i}{-1-3i} \right| = \frac{|1+3i|}{|-1-3i|} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 1$$

تمرين تدريبي

A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب $1-i$ و $3+i$

عين هندسيا ثم جبريا :

(أ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z بحيث $|Z-1+i|=3$

(ب) مجموعة نقط M ذات اللاحقة Z بحيث $|Z-1+i|=|Z-3-i|$

✓ الحل

$$(أ) \quad \text{لدينا } |Z-1+i| = |Z - (+1-i)| = |Z - Z_A|$$

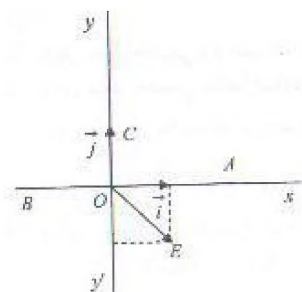
$$\text{لكن } |Z - Z_A| = AM \quad \text{إذن } AM = 3$$

وبالتالي مجموعة النقط المطلوبة هي دائرة مركزها A ونصف قطرها 3.

$$\text{إذا كان } Z = x + iy$$

$$\text{فإن } |Z-1+i| = |x+iy-1+i| = |(x-1)+i(y+1)| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$$

لكن $|Z-1+i|=3$ ومنه $(x-1)^2+(y+1)^2=9$ إذن مجموعة النقط المطلوبة هي دائرة مركزها $A(1,-1)$ ونصف قطرها 3.
(ب) $|Z-1+i|=|Z-Z_A|=AM$
 $|Z-3-i|=|Z-(3+i)|=|Z-Z_B|=BM$
بما أن $|Z-1+i|=|Z-3-i|$ فإن $AM=BM$
وبالتالي مجموعة النقط المطلوبة هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$.
 $|Z-1+i|=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$
 $|Z-3-i|=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$
يكافئ $|Z-1+i|=|Z-3-i|$ $(x-1)^2+(y+1)^2=(x-3)^2+(y-1)^2$
ومنه ينتج $x+y-2=0$
إذن مجموعة النقط المطلوبة هي محور القطعة $[AB]$ ومعادلته هي $x+y-2=0$



$$\arg(2) = \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA} \right) = 0 + 2k\pi$$

$$\arg(-2) = \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB} \right) = \pi + 2k\pi$$

$$\arg(i) = \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\arg(-i) = \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD} \right) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\arg(1-i) = \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OE} \right) = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$

2.5 الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم

النقطة M ذات اللاحقة العدد المركب الغير معدوم $Z=a+ib$ إحداثياتها القطبية هي $[r, \theta]$ حيث $r=|Z|=OM$ و $\theta = \arg(Z)$ أي عمدة Z إذن $Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=[r, \theta]$ وهذه الكتابة تسمى الشكل المثلثي للعدد المركب Z .

الانتقال من الشكل الجبري إلى المثلثي والعكس

لكن Z عند مركب غير معدوم بحيث $Z=a+ib$ مع a و b عددين حقيقيين غير معدومين معا.

مع $k \in \mathbb{Z}$ $\arg(Z)=\theta+2k\pi$ و $|Z|=r$

إذ عرفنا r و θ فإن $a=r\cos\theta$ و $b=r\sin\theta$

إذ عرفنا a و b فإن $|Z|=r=\sqrt{a^2+b^2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$$

ملاحظة

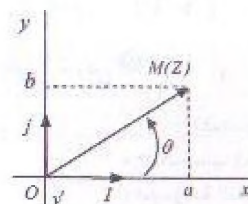
الكتابة $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ لا تمثل الشكل المثلثي في حالة $r=0$

مثال -

$$(1) \text{ إذا كان } Z=1+i \text{ فإن } |Z|=\sqrt{2} \text{ و } \theta \text{ تحقق } \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

5. عمدة عدد مركب غير معدوم - الشكل المثلثي

الستوي المركب متنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ نقطة منه M تختلف عن المبدأ O لاحتقتها العدد المركب الغير معدوم Z .



1.5 تعريف

عمدة عدد مركب غير معدوم Z

هي أي قياس معبر عنه بالراديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$

ونرمز لها بـ $\arg(Z)$

ملاحظة

إذا كان θ قياس للزاوية $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ فإن أي قياس آخر لهذه الزاوية يكون من الشكل

$$\theta + 2k\pi \text{ مع } k \in \mathbb{Z}$$

مثال -

عين عمدة كل منها. $1-i, i, -2, 2$

$$\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ أي}$$

$$Z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \text{ إذن}$$

$$Z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \text{ فإن } Z = 3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \text{ إذا كان (2)}$$

خواص

- (1) كل عدد حقيقي موجب تماما عظمته تساوي 0
- (2) كل عدد حقيقي سالب تماما عظمته تساوي π
- (3) كل عدد مركب تخيلي صرف جزءه التخيلي موجب تماما عظمته $-\frac{\pi}{2}$
- (4) وكل عدد مركب تخيلي صرف جزءه التخيلي سالب تماما عظمته $\frac{\pi}{2}$
- (5) ليكن $Z = [r, \theta]$ و $Z' = [r', \theta']$ بحيث $\theta' = \theta + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ و $(r=r')$ يكافئ $Z = Z'$

3.5 العمدة والعمليات

- (1) $\arg(-Z) = \arg(Z) + \pi$ و $\arg(\bar{Z}) = -\arg(Z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- (2) عمدة جداء عددين مركبين هي مجموع عظمتهما أي :
 $\arg(Z \times Z') = \arg(Z) + \arg(Z') + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- (3) عمدة مقلوب عدد مركب غير معدوم هي نظير عمدة هذا العدد أي :
 $\arg\left(\frac{1}{Z}\right) = -\arg(Z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- (4) عمدة حاصل قسمة عددين مركبين غير معدومين هي الفرق بين عمدة البسط و عمدة المقام أي :
 $\arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg(Z) - \arg(Z') + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- (5) من أجل كل عدد صحيح n :
 $\arg(Z^n) = n \arg(Z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

الإثبات

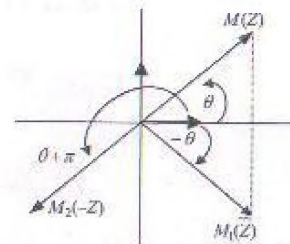
(1) بما أن M_1 نظيرة M بالنسبة إلى محور الفواصل فإن :

$$\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_1} \right) = - \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM} \right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_1} \right) = \arg(\bar{Z}) \text{ و } \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM} \right) = \arg(Z) \text{ لكن}$$

$$\arg(\bar{Z}) = -\arg(Z) + 2k\pi \text{ إذن}$$

بما أن M_2 نظيرة M بالنسبة إلى المبدأ O



$$\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_2} \right) = \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM} \right) + \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2} \right) + 2k\pi$$

$$\arg(-Z) = \arg(Z) + \pi + 2k\pi \text{ أي}$$

$$\begin{aligned} Z &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ و } Z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta') \text{ مع } r' > 0 \text{ و } r > 0 \\ Z Z' &= r r' [(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')] \\ Z Z' &= r r' [\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')] \end{aligned}$$

وبما أن $r' r > 0$ فإن $\theta + \theta'$ هي عمدة العدد $Z Z'$

$$\arg(Z Z') = \arg(Z) + \arg(Z') + 2k\pi \text{ إذن}$$

$$\arg(Z Z') = 0 + 2k\pi \text{ فإن } Z Z' = 1 \text{ إذا كان (3)}$$

$$\arg(Z) + \arg(Z') = 0 + 2k\pi \text{ أي}$$

$$\arg(Z') = -\arg(Z) + 2k\pi \text{ وبالتالي}$$

$$\arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg\left(Z \times \frac{1}{Z'}\right) = \arg(Z) + \arg\left(\frac{1}{Z'}\right) + 2k\pi \text{ (4)}$$

$$= \arg(Z) - \arg(Z') + 2k\pi$$

(5) نرهن على صحة المساواة بالتراجع على n ($n \geq 0$) في حالة n سالب نضع $n = -n'$

تمرين تدريبي

عين الشكل الجبري ثم الشكل الثلاثي للعدد $Z = (1+i)(1-i\sqrt{3})$ ثم استنتج قيمة كل من $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$

✓ الحل

$$Z = (1+i)(1-i\sqrt{3}) = 1 - i\sqrt{3} + i + \sqrt{3} = (1+\sqrt{3}) + i(1-\sqrt{3})$$

$$|Z| = |1+i||1-i\sqrt{3}| = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$$

$$\arg(Z) = \arg(1+i) + \arg(1-i\sqrt{3}) \text{ لنينا}$$

لتكن θ عمدة $1+i$ و θ' عمدة $1-i\sqrt{3}$

$$\text{ومنه } \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{ومنه } \theta' = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \begin{cases} \cos \theta' = \frac{1}{2} \\ \sin \theta' = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{وبالتالي } \arg(Z) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$Z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{-\pi}{12} + i \sin \frac{-\pi}{12} \right) \text{ إذن}$$

تمرين تدريبي

نعطي في المستوي المركب النقط A, B, C لواقعها على التوالي :
 $2+i(\sqrt{3}+1), 3+i, 1+i$
 بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

✓ الحل

لإثبات أن المثلث متقايس الأضلاع يكفي أن نثبت أنه متقايس الساقين وأن إحدى زواياه الموجهة قياسها $\frac{\pi}{3}$ أو $\frac{-\pi}{3}$.

لنبين أن $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ طويلته 1 وعمدته $\frac{\pi}{3}$ أو $\frac{-\pi}{3}$.

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{2+i(\sqrt{3}+1)-1-i}{3+i-1-i} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\left| \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = 1$$

ومنه $|Z_C - Z_A| = |Z_B - Z_A|$ أي $AC = AB$

$$\arg \left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \right) = \arg \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ و } \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

ومنه نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

5.5 دستور موافر

من أجل كل عدد حقيقي θ ومن أجل كل عدد صحيح n :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

♦ مثال -

عين الشكل الجبري للعند المركب $Z = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{50}$

✓ الحل

نضع $Z = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ عندئذ $|Z| = 1$ و $\arg(Z) = \frac{\pi}{3}$

لأن $\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$

بالمطابقة بين الشكل الجبري والمثلثي نجد

$$\begin{cases} 2\sqrt{2} \cos \left(\frac{-\pi}{12} \right) = 1 + \sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} \sin \left(\frac{-\pi}{12} \right) = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} \cos \left(\frac{-\pi}{12} \right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin \left(\frac{-\pi}{12} \right) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

وبما أن $\sin \left(\frac{-\pi}{12} \right) = -\sin \frac{\pi}{12}$ و $\cos \left(\frac{-\pi}{12} \right) = \cos \frac{\pi}{12}$

فإن $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ و $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

4.5 العمدة والهندسة

خواص

(1) من أجل كل نقطتين مختلفتين A و B لدينا : $\arg(Z_B - Z_A) = \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB} \right) + 2k\pi$

(2) من أجل كل النقط A, B, C, D بحيث $A \neq B$ و $C \neq D$

لدينا $\arg \left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_C} \right) = \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB} \right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(3) إذا كان $\frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_C} = k$ مع $k \in \mathbb{R}$ فإن $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{CD}$

الإثبات

$$\arg \left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_C} \right) = \arg(Z_B - Z_A) - \arg(Z_D - Z_C) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

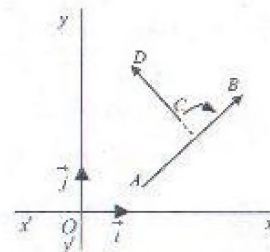
$$= \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB} \right) - \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{CD} \right) + 2k\pi$$

$$= - \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OI} \right) - \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{CD} \right) + 2k\pi$$

$$= - \left[\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OI} \right) + \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{CD} \right) \right] + 2k\pi$$

$$= - \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \right) + 2k\pi$$

$$= \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB} \right) + 2k\pi$$



العدد المركب $f(\theta)$ من U حيث $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$ لنبين أنه من أجل كل عددين حقيقيين θ و θ' لدينا ،

$$f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$$

$$\text{لدينا } f(\theta + \theta') = (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')$$

$$f(\theta) \times f(\theta') = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta')$$

$$= (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')$$

$$. f(\theta + \theta') = f(\theta) f(\theta')$$

ومنه نستنتج أن $f(\theta) = e^{i\theta}$ أي $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ بما أن الدالة الأسية ذات الأساس (هـ) تحول الجاميع إلى جداءات والدالة f تحقق هذه الخاصية هذا ما يقودنا إلى الترميز التالي $f(\theta) = e^{i\theta}$

تعريف 1

العدد المركب الذي طويلته 1 وعملته θ نرمز له بـ $e^{i\theta}$ ونكتب $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

مثال -

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -i$$

تعريف 2

الشكل الأسّي لعدد مركب غير معدوم Z عملته θ هو $Z = |Z| e^{i\theta}$

مثال -

$$Z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ إذا كان } Z = \left[2, \frac{\pi}{3} \right] \text{ فإن الكتابة الأسية له هي}$$

$$Z = \frac{1}{3}e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ هي } Z = \left[\frac{1}{3}, \frac{2\pi}{3} \right] \text{ الكتابة الأسية للعدد}$$

ملاحظة

$$\arg(\bar{Z}) = -\arg(Z) \text{ و } |\bar{Z}| = |Z|$$

$$\bar{Z} = |Z| e^{-i\theta} \text{ فإننا نستنتج من } Z = |Z| e^{i\theta} \text{ أن}$$

2.6 قواعد الحساب باستعمال الشكل الأسّي

Z' و Z عدنان مركبان حيث $Z = [r, \theta]$ و $Z' = [r', \theta']$ و $r > 0$ و $r' > 0$:

$$(r e^{i\theta})(r' e^{i\theta'}) = r r' e^{i(\theta + \theta')} \quad (1)$$

$$\frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \quad (2)$$

$$\frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta - \theta')} \quad (3)$$

$$Z = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{50} = \cos 50 \frac{\pi}{3} + i \sin 50 \frac{\pi}{3} \text{ ومنه}$$

$$= \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

تمرين تدريبي

$$D, C, B, A \text{ نقط لواحظها } \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i, 5 + 2i, -3 - 2i, 3 - 2i$$

$$\frac{Z_A - Z_D}{Z_B - Z_D} \text{ و } \frac{Z_C - Z_D}{Z_A - Z_D}$$

$$\text{ماذا يمكننا القول حول الزاويتين } \left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC} \right) \text{ و } \left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA} \right) :$$

✓ الحل

$$\frac{Z_C - Z_D}{Z_A - Z_D} = \frac{5 + 2i - \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i}{3 - 2i - \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i} = \frac{\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i}{\frac{3}{2} - \frac{9}{2}i} = \frac{7 - i}{3 - 9i}$$

$$= \frac{(7 - i)(3 + 9i)}{90} = \frac{30 + 60i}{90} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$$

$$\frac{Z_A - Z_D}{Z_B - Z_D} = \frac{3 - 2i - \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i}{-3 - 2i - \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{9}{2}i}{-\frac{9}{2} - \frac{9}{2}i} = \frac{3 - 9i}{-9 - 9i}$$

$$= \frac{1 - 3i}{-3 - 3i} \times \frac{-3 + 3i}{-3 + 3i} = \frac{6 + 12i}{18} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$$

بما أن العددين $\frac{Z_C - Z_D}{Z_A - Z_D}$ و $\frac{Z_A - Z_D}{Z_B - Z_D}$ متساويان

$$\arg \left(\frac{Z_C - Z_D}{Z_A - Z_D} \right) = \left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC} \right) \text{ و } \arg \left(\frac{Z_A - Z_D}{Z_B - Z_D} \right) = \left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA} \right)$$

$$\text{فإن } \left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA} \right) = \left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC} \right)$$

6. الكتابة الأسية لعدد مركب - ترميز أولر

1.6 الكتابة الأسية

كل عدد مركب طويلته 1 نستطيع كتابته على الشكل $Z = \cos \theta + i \sin \theta$ لكن U مجموعة الأعداد المركبة التي طويلتها 1 و f الدالة التي ترافق بكل عدد حقيقي θ

$$(4) \quad \overline{re^{i\theta}} = r e^{-i\theta} \quad (5) \quad (re^{i\theta} = r' e^{i\theta'}) \text{ يكافئ } (r=r' \text{ و } \theta=\theta'+2k\pi)$$

مثال -

ليكن Z و Z' عدنان مركبان حيث $Z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $Z' = 3e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$ZZ' = (2 \times 3)e^{-i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{4}} = 6e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})} = 6e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

$$\frac{Z}{Z'} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3}e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})}$$

دستوري موافق و اولر

- من اجل كل عدد حقيقي θ ومن اجل كل عدد صحيح n لدينا $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

- بمان $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ و $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ فإننا نستنتج:

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \quad \text{و} \quad \cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

تمرين تدريبي

اعط الشكل الاسي للأعداد المركبة الآتية $(1-i)^{14}$ ، $\frac{1-i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}}$ ، $\frac{2+2i}{\sqrt{3}-i}$

الحل

$$\frac{2+2i}{\sqrt{3}-i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

$$\frac{1-i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = -e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{4\pi}{3}} = -e^{-i\frac{3\pi}{3}}$$

بمان $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ فإن $(1-i)^{14} = (\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^{14} = 2^7 \times e^{-\frac{7}{2}\pi i} = 128e^{-\frac{7}{2}\pi i}$

لان $-\frac{7}{2}\pi = -2\pi - \frac{3}{2}\pi$

3.6 الكتابة الخطية لـ $\sin^n x$ و $\cos^n x$

- تعني بالكتابة الخطية التعبير عن $\cos^n x$ او $\sin^n x$ او بصفة عامة عن مجموع حدود من

الشكل $a\cos^p x \sin^q x$ بواسطة مجموع حدود من الشكل $b\cos^p x$ او $c\sin^q x$

مع a, b, c اعداد حقيقية و p, q, n اعداد طبيعية.

- فائدة هذه الكتابة تظهر جليا في تعيين الدوال الأصلية وحساب التكاملات.

- ليكن Z عدد مركب طويلته 1 وعملته x .

اذن $\overline{Z} = e^{-ix} = \cos x - i\sin x$ و $Z = e^{ix} = \cos x + i\sin x$

ومنه نستنتج $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ و $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

و $\sin^n x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^n$ و $\cos^n x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^n$

(1) $e^{inx} + e^{-inx} = 2\cos(nx)$

(2) $e^{inx} - e^{-inx} = 2i\sin(nx)$

لنشر $\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^n$ او $\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^n$ نستعمل دستور ثنائي الحد والمساوتين (1) و (2)

مثال -

أوجد العبارة الخطية لكل من $\cos^3 x$ و $\sin^3 x$

الحل

(1) لدينا $\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3$

$$\cos^3 x = \frac{1}{2^3} [e^{5ix} + 5e^{3ix}e^{-ix} + 10e^{ix}e^{-2ix} + 10e^{ix}e^{-3ix} + 5e^{-ix}e^{-4ix} + e^{-5ix}]$$

$$= \frac{1}{2^3} [(e^{5ix} + e^{-5ix}) + 10(e^{ix} + e^{-ix}) + 5(e^{3ix} + e^{-3ix})]$$

$$= \frac{1}{2^3} [2\cos 5x + 20\cos x + 10\cos 3x]$$

$$= \frac{1}{16} [\cos(5x) + 5\cos(3x) + 10\cos(x)]$$

(2) لدينا $\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3$

$$\sin^3 x = \frac{1}{2^3 i^3} [e^{5ix} - 5e^{3ix}e^{-ix} + 10e^{ix}e^{-2ix} - 10e^{ix}e^{-3ix} + 5e^{-ix}e^{-4ix} - e^{-5ix}]$$

$$= \frac{1}{2^3 i} [(e^{5ix} - e^{-5ix}) - 5(e^{3ix} - e^{-3ix}) + 10(e^{ix} - e^{-ix})]$$

$$= \frac{1}{2^3 i} [2i\sin(5x) - 10i\sin(3x) + 20i\sin(x)]$$

$$= \frac{1}{16} [\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x)]$$

تمرين تدريبي 1

ليكن $Z = 5e^{i\frac{\pi}{4}}$ بين ان Z^{52} حقيقي ثم عين إشارته.

الحل

$$Z^{52} = (5e^{i\frac{\pi}{4}})^{52} = 5^{52} \cdot e^{13\pi i}$$

ومنه $\arg(z^{52}) = \frac{52\pi}{4} = 13\pi = \pi + 6(2\pi)$ ولكن $\arg(z^{52}) = \pi$ إذن $z^{52} = 5^{52} e^{i\pi} = -5^{52}$ ومنه نستنتج أن z^{52} سالبة، ومنه فإن إشارة z^{52} سالبة.

تمرين تدريبي 2

0 عدد حقيقي من المجال $[0, \frac{\pi}{2}]$ اعط الكتابة الأسية للعدد المركب $Z = 1 + e^{i\theta}$

✓ الحل

لدينا $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ومنه $Z = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$

لكن $1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$ و $\sin \theta = 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$

إذن $Z = 2 \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$

بما أن $\frac{\pi}{2} \in [0, \theta]$ فإن $\cos \frac{\theta}{2} > 0$

إذن $Z = \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right) e^{i \frac{\theta}{2}}$

7. معادلات من الدرجة الثانية ذات المجهول Z بمعادلات حقيقية

مبرهنة

لتكن المعادلة $aZ^2 + bZ + c = 0$ ذات المجهول المركب Z و a, b, c أعداد حقيقية مع $a \neq 0$.

مميز هذه المعادلة هو العدد الحقيقي $\Delta = b^2 - 4ac$

- إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة لها حلان حقيقيان مختلفان هما $Z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $Z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

- إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة لها حل مضاعف $Z_0 = \frac{-b}{2a}$

- إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة لها حلان مركبان مترافقان $Z' = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $Z'' = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

الإنبات

المعادلة من الدرجة الثانية لها حلان في المجموعة \mathbb{C} مهما كانت العبارات الحقيقية a, b, c و $a \neq 0$.

نضع $f(Z) = aZ^2 + bZ + c$ مع $a \neq 0$.

الشكل النموذجي لـ $f(Z)$ هو $f(Z) = a \left[\left(Z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$

إذا كان $\Delta > 0$ نضع $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$

وبالتالي $f(Z) = a \left[\left(Z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right] = a \left(Z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(Z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)$

$f(Z) = 0$ يكافئ $\left(Z - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$ أو $\left(Z - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$

- إذا كان $\Delta = 0$ فإن $f(Z) = a \left(Z + \frac{b}{2a} \right)^2$

$f(Z) = 0$ يكافئ $Z = -\frac{b}{2a}$

- إذا كان $\Delta < 0$ فإن $\Delta = -(\sqrt{-\Delta})^2$ وبالتالي نستطيع وضع

وبالتالي $f(Z) = a \left[\left(Z + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 \right] = a \left[\left(Z + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 \right]$

$-a \left[\left(Z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \left(Z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \right]$

$f(Z) = 0$ يكافئ $\left(Z - \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)$ أو $\left(Z - \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)$

◆ مثال -

حل في \mathbb{C} المعادلتين التاليتين:

$$Z^2 + Z + 1 = 0 \quad (1)$$

$$Z^2 + 3Z + 2 = 0 \quad (2)$$

✓ الحل

$$\Delta = 1^2 - 4(1)(1) = -3 \quad (1)$$

$\Delta < 0$ ومنه المعادلة (1) لها حلان مركبان هما $Z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ و $Z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

(2) $\Delta = 9 - 4(1)(2) = 1$ ومنه المعادلة لها حلان حقيقيان مختلفان هما:

$$Z_1 = \frac{-3 + 1}{2} = -1 \quad Z_2 = \frac{-3 - 1}{2} = -2$$

خاصية

ليكن $f(Z) = aZ^2 + bZ + c$ حيث a, b, c أعداد حقيقية مع $a \neq 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- إذا كان $\Delta \neq 0$ فإن $aZ^2 + bZ + c = a(Z - Z_1)(Z - Z_2)$ حيث Z_1, Z_2 جذرين مختلفين لـ $f(Z)$.

- إذا كان $\Delta = 0$ فإن $f(Z) = a(Z - Z_0)^2$ حيث Z_0 الجذر المضاعف لـ $f(Z)$.

8. الجذرين التربيعيين لعدد مركب غير معدوم

1.8 تعريف

ليكن $z = a + ib$ عدد مركب غير معدوم
الجذر التربيعي للعدد المركب z هو العدد المركب Z الذي يحقق $Z^2 = z$.

2.8 إيجاد الجذرين التربيعيين

تعيين الجذرين التربيعيين يؤول إلى حل المعادلة ذات المجهول Z التالية $Z^2 = z$.

$$Z = x + iy \text{ ومنه } Z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$$

$$Z^2 = z \text{ يكافئ } \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

$$\text{بما أن } |Z|^2 = |z| \text{ فإن } x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{إذن من المساواة } Z^2 = z \text{ نستنتج } \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \text{ (I)}$$

بعد حل الجملة (I) ذات المجهولين x و y نكون قد عينا الجذرين التربيعيين لـ z .

مثال -

عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 3 - 4i$

الحل

$$\text{ليكن } Z = x + iy \text{ جذر تربيعي لـ } z \text{ ومنه } \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \text{ ... (1)} \\ 2xy = -4 \text{ ... (2)} \\ x^2 + y^2 = 5 \text{ ... (3)} \end{cases} \text{ (I)}$$

بجمع (1) و (3) طرفا لطرف نجد $2x^2 = 8$ ومنه $x^2 = 4$

$$x^2 = 4 \text{ يكافئ } (x = 2) \text{ و } (x = -2)$$

$$\text{إذا كان } x = 2 \text{ فإن } y = \frac{-4}{2x} = -1$$

$$\text{إذا كان } x = -2 \text{ فإن } y = \frac{-4}{2x} = 1$$

إذن الجذرين التربيعيين للعدد المركب z هما $Z_1 = 2 - i$ و $Z_2 = -2 + i$.

3.8 حل معادلات من الدرجة الثانية بمعاملات مركبة

$f(Z) = aZ^2 + bZ + c$ مع a, b, c أعداد مركبة و $a \neq 0$.

بما أن القواعد في \mathbb{C} هي نفسها في \mathbb{R} فإن مميز $f(Z)$ هو $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$\text{الشكل النموذجي لـ } f(Z) \text{ هو } f(Z) = a \left[\left(Z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

ليكن δ الجذر التربيعي لـ Δ ومنه $\delta^2 = \Delta$

$$\text{وبالتالي } f(Z) = a \left[\left(Z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2} \right] = a \left[\left(Z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \right) \left(Z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \right) \right]$$

$$\text{إذن المعادلة } f(Z) = 0 \text{ لها حلان هما } Z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ و } Z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

مثال -

حل في \mathbb{C} المعادلتين :

$$(1) \quad iZ^2 - iZ - 3 - i = 0$$

$$(2) \quad Z^2 + (3 - 2i)Z + 5 - 5i = 0$$

الحل

$$\Delta = (-i)^2 - 4(i)(-3 - i) = -5 + 12i \quad (1)$$

نبحث عن الجذرين التربيعيين لـ Δ

ليكن $\delta = a + ib$ جذر تربيعي لـ Δ ومنه $\delta^2 = \Delta$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \text{ ... (1)} \\ 2ab = 12 \text{ ... (2)} \\ a^2 + b^2 = 13 \text{ ... (3)} \end{cases}$$

بجمع (1) و (3) طرفا لطرف نجد $a^2 = 4$ ومنه $a = 2$ أو $a = -2$

لما $a = 2$ نجد $b = 3$ ولما $a = -2$ نجد $b = -3$

ومنه فإن الجذرين التربيعيين لـ Δ هما $\delta = 2 + 3i$ و $\delta = -2 - 3i$

ليكن Z_1, Z_2 حلان للمعادلة (1) :

$$\text{إذن } Z_1 = \frac{i + 2 + 3i}{2i} = \frac{2 + 4i}{2i} = \frac{-2i + 4}{2} = 2 - i$$

$$Z_2 = \frac{i - 2 - 3i}{2i} = \frac{-2 - 2i}{2i} = \frac{2i - 2}{2} = -1 + i$$

$$\Delta = (3 - 2i)^2 - 4(1)(5 - 5i) = 9 - 12i - 4 - 20 + 20i = -15 + 8i \quad (2)$$

ليكن δ جذر تربيعي لـ Δ بحيث $\delta^2 = \Delta$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -15 \text{ ... (1)} \\ 2ab = 8 \text{ ... (2)} \\ a^2 + b^2 = 17 \text{ ... (3)} \end{cases}$$

بجمع (1) و (3) طرفا لطرف نجد $2a^2 = 2$ ومنه $a^2 = 1$ أي $a = 1$ أو $a = -1$

لما $a = 1$ نجد $b = 4$ ولما $a = -1$ نجد $b = -4$

ومنه فإن الجذرين التربيعيين لـ Δ هما $1 + 4i$ و $-1 - 4i$

ليكن Z_1 و Z_2 حلان للمعادلة (ب) :

$$Z_2 = \frac{-3+2i-1-4i}{2} = -2-i \quad \text{و} \quad Z_1 = \frac{-3+2i+1+4i}{2} = -1+3i$$

9. المعادلات من الشكل $p(Z)=0$ حيث p كثير حدود معاملاته حقيقية

تعريف

القول ان p كثير حدود مركب بمعاملات حقيقية يعني ان p هو عبارة عن دالة من \mathbb{C} في \mathbb{C} من الشكل $p(Z) = a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \dots + a_1 Z + a_0$ مع a_n, \dots, a_1, a_0 أعداد حقيقية. $a_n \neq 0$ نقول ان p من الدرجة n .

مبرهنة

- إذا كان Z_0 جذرا لكثير الحدود p من الدرجة n أي $p(Z_0)=0$ فإنه يوجد كثير حدود q من الدرجة $n-1$ بمعاملات حقيقية بحيث من أجل كل عدد مركب Z يكون $p(Z) = (Z - Z_0)q(Z)$
- كل كثير حدود من الدرجة n له n جذرا في \mathbb{C} مختلفة أو متساوية وهذه النتائج تبقى صحيحة حتى ولو كانت المعاملات ليست حقيقية.

مثال

نعتبر في \mathbb{C} كثير الحدود p العرف كما يلي $p(Z) = 2Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 1$

(1) احسب $p(1)$ ثم بين أنه يوجد $q(Z)$ بحيث من أجل كل Z من \mathbb{C}

$$p(Z) = (Z - 1)q(Z)$$

(2) حل في \mathbb{C} المعادلة $p(Z) = 0$

(3) نسمي Z_1, Z_2 الجذرين الآخرين للمعادلة $p(Z) = 0$ ولتكن النقط A, B, C

لواحقها A, Z_1, Z_2 على الترتيب. احسب $\left| \frac{Z_1 - Z_0}{Z_2 - Z_0} \right|$ ماذا تستنتج ؟

✓ الحل

$$(1) \quad p(1) = 2 - 3 + 2 - 1 = 0 \quad \text{ومنه نستنتج أن } 1 \text{ جذر لـ } p(Z)$$

بما ان $p(Z)$ من الدرجة الثالثة فإن $q(Z)$ من الدرجة الثانية وعليه من أجل كل Z من \mathbb{C}

$$p(Z) = (Z - 1)(aZ^2 + bZ + c) = aZ^3 + (b - a)Z^2 + (c - b)Z - c$$

بالمقارنة مع عبارة $p(Z)$ نجد :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b - a = -3 \\ c - b = 2 \\ -c = -1 \end{cases}$$

$$p(Z) = (Z - 1)(2Z^2 - Z + 1) \quad \text{لأن}$$

$$\begin{cases} Z - 1 = 0 \\ 2Z^2 - Z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} Z = 1 \\ 2Z^2 - Z + 1 = 0 \end{cases} \quad p(Z) = 0$$

نحل المعادلة $2Z^2 - Z + 1 = 0$ (*)

$$\Delta = 1 - 4(2)(1) = -7 \quad \text{ومنه فإن المعادلة (*) لها حلان هما} \quad Z_1 = \frac{1+i\sqrt{7}}{4}, \quad Z_2 = \frac{1-i\sqrt{7}}{4}$$

لأن المعادلة $p(Z) = 0$ لها ثلاثة حلول هي $1, Z_1, Z_2$.

$$\left| \frac{Z_1 - Z_0}{Z_2 - Z_0} \right| = \left| \frac{-3 + i\sqrt{7}}{-3 - i\sqrt{7}} \right| = \frac{\sqrt{9+7}}{\sqrt{9+7}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{16}} = 1$$

ولدينا من جهة أخرى $\left| \frac{Z_1 - Z_0}{Z_2 - Z_0} \right| = \frac{AB}{AC}$

لأن $\frac{AB}{AC} = 1$ وهذا يعني ان ABC مثلث متقايس الساقين رأسه الأساسي هو A .

الحلول المرافقة

مبرهنة

p كثير حدود مركب بمعاملات حقيقية.

إذا قبلت المعادلة $p(z) = 0$ حلا مركبا z_0 فإن مرافقه \bar{z}_0 هو أيضا حلا لهذه المعادلة

$$p(z) = (z - z_0)q(z) \quad \text{و عندئذ نكتب}$$

البرهان

نعتبر كثير الحدود $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$

و a_n, \dots, a_1, a_0 أعداد حقيقية مع $a_n \neq 0$.

نفرض ان z_0 حلا للمعادلة $p(z) = 0$ ونبين ان \bar{z}_0 حلا أيضا للمعادلة $p(z) = 0$.

$$p(z_0) = 0 \quad \text{يعني} \quad p(\bar{z}_0) = 0 \quad \text{وهذا يعني ان} \quad a_n \bar{z}_0^n + a_{n-1} \bar{z}_0^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 = 0$$

وحسب خواص مرافق مجموع أعداد مركبة نستنتج $a_n \bar{z}_0^n + a_{n-1} \bar{z}_0^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 = 0$

وهذا يعني ان \bar{z}_0 حل للمعادلة $p(z) = 0$

مثال

$$p(z) = z^3 - z^2 + z - 1 \quad \text{كثير حدود مركب حيث}$$

بين ان $z_0 = i$ حل للمعادلة $p(z) = 0$ ثم حل في \mathbb{C} المعادلة $p(z) = 0$

✓ الحل

$$p(z_0) = i^3 - i^2 + i - 1 = -i + 1 + i - 1 = 0$$

ومنه فإن i حل للمعادلة $p(z) = 0$

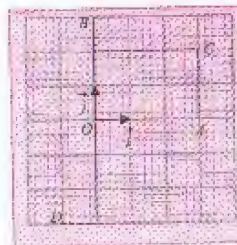
وحسب البرهنة السابقة فإن $-i$ حل أيضا لـ $p(z) = 0$

تطبيق



1 تطبيق

تعيين لواحق نقط واشعة



استعمل الشكل المقابل لتعيين :
(أ) لواحق النقط A, B, C, D .
(ب) لواحق الأشعة $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{AD}, \vec{BC}$.

✓ الحل

$$\begin{aligned} z_D &= -1 - 3i, \quad z_C = -3 + 2i, \quad z_B = 3i, \quad z_A = 1 \\ (أ) \quad z_D &= z_D - z_A = -2 - 3i, \quad z_{\vec{BC}} = z_C - z_B = -3 - i, \quad z_{\vec{OB}} = z_B = 3i, \quad z_{\vec{OA}} = z_A = 1 \\ (ب) \end{aligned}$$

2 تطبيق

تطبيق خاصية تساوي عددين مركبين

عين العددين الحقيقيين x و y بحيث :
(1) $2x - y + i(x + 3y) = 1 - 2i$ (أ)
(2) $3x + 2iy + i(x - iy) = i$ (ب)

✓ الحل

$$(أ) \text{ من المساواة (1) نستنتج } \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{7} \\ y = -\frac{5}{7} \end{cases} \text{ نجد (I)}$$

$$(ب) \text{ بعد تبسيط المساواة (2) نجد } (3x + y) + i(x + 2y) = i$$

$$(II) \text{ بالتطابقة نجد } \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

وعليه من أجل كل z من \mathbb{C}
يكون $p(z) = (z-i)(z+i)q(z)$
بما أن $q(z)$ من الدرجة الأولى فإنه يكتب على الشكل $az+b$
وعليه $p(z) = (z-i)(z+i)(az+b)$
بعد النشر و التطابقة نجد $b = -1, a = 1$
إذن $p(z) = (z-i)(z+i)(z-1)$
 $p(z) = 0$ يكافئ $(z=i)$ أو $(z=-i)$ أو $(z=1)$

بعد حل الجملة (II) نجد
$$\begin{cases} x = \frac{-1}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}$$

تطبيق 3

تحديد مجموعة النقاط

من أجل كل عدد مركب z حيث $z = x + iy$ نضع $f(z) = z^2 - z + 1$ مع x و y عددين حقيقيين
(أ) اكتب $f(z)$ على الشكل الجبري
(ب) ماهي مجموعة النقاط M ذات اللاحقة z حيث $f(z)$ حقيقي؟

الحل

$$f(z) = (x + iy)^2 - (x + iy) + 1 = x^2 - y^2 + 2ixy - x - iy + 1 = (x^2 - y^2 - x + 1) + i(2xy - y)$$

$$(ب) \quad f(z) \text{ حقيقي يعني أن } \begin{cases} y = 0 \\ 2xy - y = 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} y = 0 \\ 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

ومنه مجموعة النقاط M بحيث $f(z)$ حقيقي هي اتحاد مستقيمين (d_1) و (d_2) معادلتيهما $y = 0$ و $d_2: 2x - 1 = 0$

تطبيق 4

تحديد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لعدد مركب

(أ) عين الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب $\frac{1-i}{1+i}$
(ب) استنتج الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعددين $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}$ و $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{17}$

الحل

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1-i)^2}{1^2+1^2} = \frac{1-2i-1}{2} = -i \quad (أ)$$

$$(ب) \quad i^2 = -1 \quad \text{لأن} \quad i^4 = 1 \quad \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10} = (-i)^{10} = i^{10} = i^8 \times i^2 = -1$$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{17} = (-i)^{17} = -i^{17} = -i^{16} \times i = -i$$

تطبيق 5

حل معادلات في المجموعة \mathbb{C}

حل في \mathbb{C} المعادلات ذات المجهول z التالية:
(أ) $(z-2)(z-1)=0$ ، (ب) $iz+2-i=0$ ، (ج) $z^2+9=0$
(د) $\frac{1}{z+i}-3+i$ ، (هـ) $\frac{z+3i}{z-3}=i$ ، (و) $z^2-9=0$

الحل

$$(أ) \quad (z-2)(z-1)=0 \quad \text{تكافئ} \quad z-2=0 \quad \text{أو} \quad z-1=0$$

$$\text{أي} \quad z=2 \quad \text{أو} \quad z=\frac{1}{i}=-i$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (أ) هي $S = \{2, -i\}$

$$(ب) \quad \text{المعادلة} \quad iz+2-i=0 \quad \text{تكافئ} \quad iz=i-2$$

$$\text{ومنه نستنتج} \quad z = \frac{-2+i}{i} = 1+2i$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $S = \{1+2i\}$

$$(ج) \quad z^2+9=0 \quad \text{يكافئ} \quad z^2 = -9 = (3i)^2$$

ومنه المعادلة $z^2+9=0$ لها حلان هما $z_1=3i$ و $z_2=-3i$

فتكون مجموعة حلول المعادلة هي $S = \{3i, -3i\}$

$$(د) \quad \text{المعادلة} \quad \frac{1}{z+i} = 3+i \quad \text{تكافئ} \quad z+i = \frac{1}{3+i} \quad \text{أي} \quad z = \frac{1}{3+i} - i$$

$$\text{ومنه} \quad z = -\frac{3-i}{(3+i)(3-i)} = -\frac{3-i}{3^2+1^2} = -\frac{3-i}{10} = -\frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $S = \left\{-\frac{3}{10} + \frac{1}{10}i\right\}$

$$(هـ) \quad \text{المعادلة} \quad \frac{z+3i}{z-3} = i \quad \text{تكافئ} \quad (1-i)z = -6i \quad \text{يكافئ} \quad z = \frac{-6i}{1-i}$$

$$\text{بما أن} \quad \frac{-6i}{1-i} = \frac{-6i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-6i+6}{2} = 3-3i \quad \text{فإن} \quad z = 3-3i$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $S = \{3-3i\}$

$$(و) \quad z^2-9=0 \quad \text{تعني} \quad z^2=3^2 \quad \text{ومنه} \quad z=3 \quad \text{أو} \quad z=-3$$

ومنه مجموعة الحلول هي $S = \{3, -3\}$

تطبيق 6

حل جملة معادلتين

$$\begin{cases} z-3z'=1+i \\ 2z+iz'=1 \end{cases} \quad \text{حل الجملتين التاليتين}$$

ومنه مجموعة النقط M هي المستقيم ذو المعادلة $y=x$

(ج) تخيلي صرف هذا معناه $\frac{x+y}{2}=0$ أي $y=-x$

ومنه مجموعة النقط M هي المستقيم ذو المعادلة $y=-x$

تطبيق 8

المسألة المتتالية الدورية والمتتالية الهندسية

- (1) اكتب على أبسط شكل ممكن الأعداد $i^0, i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8, i^9, i^{10}, i^{11}, i^{12}, i^{13}, i^{14}, i^{15}$
- (2) بين أن متتالية الأعداد المركبة (z_n) المعرفة بـ $z_n = i^n$ دورية بطلب إيجاد دورها.
- (3) نضع $S_n = 1 + i + i^2 + \dots + i^n$
- (أ) احسب $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}$
- (ب) تحقق أن $S_n - i S_{n-1} = 1 - i^{n+1}$
- (ج) ببسط S_n في كل حالة من الحالات التالية:

$$n=4p, n=4p+1, n=4p+2, n=4p+3 \text{ مع } p \in \mathbb{N}$$

✓ الحل

- (1) $i^0 = i^4 = i^8 = -1, i^1 = i^5 = i^9 = i, i^2 = (i^2)^2 = -1, i^3 = -i, i^6 = -i^2 = 1, i^{10} = i^6 = i^2 = -1, i^{11} = i^7 = i^3 = -i, i^{12} = i^8 = i^4 = -1, i^{13} = i^9 = i^5 = i, i^{14} = i^{10} = i^6 = i^2 = -1, i^{15} = i^{11} = i^7 = i^3 = -i$
- (2) دورية دورها T هذا معناه أنه من أجل n من \mathbb{N} لدينا $z_{n+T} = z_n$
- (3) الأعداد $1, i, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8, i^9, i^{10}, i^{11}, i^{12}, i^{13}, i^{14}, i^{15}$ حدود لمتتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها i

$$S_n = \frac{1-i^{n+1}}{1-i} = \frac{(1-i^{n+1})(1+i)}{2} \text{ ومنه}$$

$$S_0 = \frac{(1-i^1)(1+i)}{2} = 1+i \quad (1)$$

$$S_1 = \frac{(1-i^2)(1+i)}{2} = \frac{(1-i^2)(1+i)}{2} = 1+i$$

$$S_2 = \frac{(1-i^3)(1+i)}{2} = \frac{(1-i^3)(1+i)}{2} = 1+i$$

$$S_3 = \frac{(1-i^4)(1+i)}{2} = \frac{(1-i^4)(1+i)}{2} = 1+i$$

$$S_4 = \frac{(1-i^5)(1+i)}{2} = \frac{(1-i^5)(1+i)}{2} = 1+i$$

$$S_n - i S_{n-1} = \frac{(1-i^{n+1})(1+i)}{2} - \frac{i(1-i^n)(1+i)}{2} \quad (ب)$$

$$= \frac{(1-i^{n+1})(1+i-i)}{2} = \frac{(1-i^{n+1})(2)}{2} = 1-i^{n+1}$$

✓ الحل

$$\begin{cases} 2z+z'-1=0 \quad (1) \\ z-i z'=i \quad (2) \end{cases}$$

من المساواة (2) نجد $z=i z'+i$

نعوض z في (1) نجد $2(i z'+i)+z'-1=0$

وبالتبسيط نجد $(2i+1)z'=1-2i$

$$z' = \frac{1-2i}{1+2i} = \frac{(1-2i)^2}{1+4} = \frac{1-4-4i}{5} = \frac{-3-4i}{5} \text{ ومنه}$$

$$z = i \left(\frac{-3-4i}{5} \right) + i = \frac{-3i-4i^2}{5} + i = \frac{-3i+4}{5} + i = \frac{4}{5} + \frac{2i}{5}$$

$$\begin{cases} z-3z'=1+i \quad (1) \\ 2z+i z'=1 \quad (2) \end{cases}$$

من المساواة (2) نجد $z = \frac{1-i z'}{2}$

نعوض z في (1) نجد $\frac{1-i z'}{2} - 3z' = 1+i$

$$z' = \frac{1-i}{-1-i-6} = \frac{1-i}{-7-i} \text{ ومنه } \left(-\frac{1}{2}i-3 \right) z' = \frac{1}{2}+i$$

$$z' = -\frac{8}{37} - \frac{11i}{37} \text{ ومنه } \frac{\frac{1-i}{2}}{-3-\frac{1}{2}i} = -\frac{8}{37} - \frac{11i}{37}$$

$$z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i z' = \frac{13}{37} + \frac{4i}{37} \text{ إذن}$$

المسألة تعيين مجموعة النقط

تطبيق 7

ليكن z عددا مركبا حيث $z=x+iy$ وليكن Z عددا مركبا حيث $Z = \frac{z}{1+i}$

(أ) اكتب Z على الشكل الجبري.

(ب) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث Z حقيقي.

(ج) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث Z تخيلي صرف.

✓ الحل

$$Z = \frac{x+iy}{1+i} = \frac{(x+iy)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{x-ix+iy+y}{2} = \frac{x+y}{2} - i \frac{x-y}{2} \quad (1)$$

(ب) Z حقيقي يعني أن $\frac{x-y}{2}=0$ أي $y=x$

(ج) في حالة $n=4p$ لدينا:

$$S_n = \frac{(1-i^{4p})(1+i)}{2} = \frac{(1-i^4)^p(1+i)}{2} = \frac{(1-1)^p(1+i)}{2} = \frac{(1-1^p)(1+i)}{2} = \frac{(1-1)(1+i)}{2} = 1$$

في حالة $n=4p+1$ لدينا:

$$S_n = \frac{(1-i^{4p+1})(1+i)}{2} = \frac{(1-i^4)^p(1-i)(1+i)}{2} = \frac{(1-1)^p(1-i^2)(1+i)}{2} = \frac{(1-1^p)(1-i^2)(1+i)}{2} = \frac{(1-1)(1-i^2)(1+i)}{2} = 1+i$$

في حالة $n=4p+2$ لدينا:

$$S_n = \frac{(1-i^{4p+2})(1+i)}{2} = \frac{(1-i^4)^p(1-i^2)(1+i)}{2} = \frac{(1-1)^p(1-i^2)(1+i)}{2} = \frac{(1-1^p)(1-i^2)(1+i)}{2} = \frac{(1-1)(1-i^2)(1+i)}{2} = 1$$

في حالة $n=4p+3$ لدينا $S_n = \frac{(1-i^{4p+3})(1+i)}{2} = 0$

تطبيق 9

تعيين مرافق عدد مركب

اكتب بدلالة مرافقات الأعداد المركبة Z التالية:

(أ) $Z = z^2 + 3iz - 1$ (ب) $Z = (z-i)(z+3)$

(ج) $Z = \frac{3z^2 - 3iz + 3}{-iz + 2i}$ (د) $Z = (3-2iz)^2$

الحل

(أ) $\bar{Z} = \overline{(z^2 + 3iz - 1)} = \bar{z}^2 + 3i\bar{z} - 1 = \bar{z}^2 + 3\bar{i} \times \bar{z} - 1 = \bar{z}^2 - 3i\bar{z} - 1$

(ب) $\bar{Z} = \overline{(z-i)(z+3)} = (\bar{z}-i)(\bar{z}+3) = (\bar{z}+i)(\bar{z}+3)$

(ج) $\bar{Z} = \overline{\left(\frac{3z^2 - 3iz + 3}{-iz + 2i}\right)} = \frac{\overline{(3z^2 - 3iz + 3)}}{\overline{(-iz + 2i)}} = \frac{3\bar{z}^2 + 3i\bar{z} + 3}{iz - 2i}$

(د) $\bar{Z} = \overline{(3-2iz)^2} = (3-2i\bar{z})^2 = (3+2i\bar{z})^2$

تطبيق 10

تصنيف الأعداد المركبة

بين بدون حساب أن كل من الأعداد المركبة التالية حقيقية أو تخيلية صرفة:

(أ) $Z = z^2 - \bar{z}$ (ب) $Z = \frac{z^2 + \bar{z}^2}{z + \bar{z}}$ (ج) $Z = \frac{z^2 + \bar{z}^2}{z\bar{z} + 1}$

الحل

(أ) $z^2 - \bar{z} = (z - \bar{z})(z + \bar{z})$

بما أن $z + \bar{z}$ حقيقي و $z - \bar{z}$ تخيلي صرف فإن $z^2 - \bar{z}$ تخيلي صرف وبالتالي Z تخيلي صرف

(ب) $\left(\frac{z^2 + \bar{z}^2}{z + \bar{z}}\right) = \frac{(z^2 + \bar{z}^2)}{(z + \bar{z})} = \frac{z^2 + \bar{z}^2}{z + \bar{z}}$

بما أن $\bar{z} - z$ فإن Z حقيقي

(ج) $\bar{Z} = \frac{\bar{z}^2 + z^2}{\bar{z}z + 1} = Z$ ومنه Z حقيقي

تصنيف الأعداد المركبة

تطبيق 11

نضع $z_1 = \frac{1-2i}{2-i}$ و $z_2 = \frac{2i+1}{i+2}$

- بين بدون حساب أن $z_1 + z_2$ حقيقي و $z_1 - z_2$ تخيلي صرف.
- أوجد النتائج السابقة بالحساب.

الحل

(أ) $z_1 + z_2 = z_1 + z_2$ حقيقي هذا معناه أن $\overline{z_1 + z_2} = z_1 + z_2$

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \frac{1-2i}{2-i} + \frac{1+2i}{2+i} = z_1 + z_2$

ومنه $z_1 + z_2$ حقيقي.

$z_1 - z_2 = z_1 - z_2 = 0$ تخيلي صرف هذا معناه $\overline{z_1 - z_2} = 0$

$\overline{z_1 - z_2} + z_1 - z_2 = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 + z_1 - z_2 = z_2 - z_1 + z_1 - z_2 = 0$

ومنه $z_1 - z_2$ تخيلي صرف.

(ب) $z_1 + z_2 = \frac{1+2i}{2+i} + \frac{1-2i}{2-i} = \frac{(1+2i)(2-i) + (2+i)(1-2i)}{(2+i)(2-i)}$
 $= \frac{2-i+4i+2+2-4i+i+2}{5} = \frac{8}{5}$

$z_1 - z_2 = \frac{1+2i}{2+i} - \frac{1-2i}{2-i} = \frac{(1+2i)(2-i) - (1-2i)(2+i)}{(2+i)(2-i)}$
 $= \frac{2-i+4i+2-2-i+4i-2}{8} = \frac{6i}{8} = \frac{3i}{4}$

تطبيق 12

حل المعادلات في \mathbb{C}

حل في \mathbb{C} المعادلات ذات المجهول z التالية :

(أ) $z = 2 + i$ ، (ب) $(z + 1 - 3i)(z + 2i)(iz - 2) = 0$

(ج) $z + 2\bar{z} = (1 - i)^2$ ، (د) $z^2 - \bar{z}^2 = 0$

✓ الحل

(أ) المعادلة (أ) تكتب على الشكل $-iz = 2 - i$ ومنه $z = \frac{2-i}{-i} = \frac{(2-i)i}{1} = 1 + 2i$

(ب) المعادلة (ب) تكافئ (أ) $(z + 2i) = 0$ أو $(iz - 2) = 0$ أو $(z + 1 - 3i) = 0$

تكافئ $(z = \frac{2}{i})$ أو $(z = -2i)$ أو $(z = -1 + 3i)$

تكافئ $(z = -2i)$ أو $(z = -2i)$ أو $(z = -1 - 3i)$

ومنه مجموعة حلول هذه المعادلة هي $\{-1 - 3i, -2i\}$

(ج) بما أن $(1 - i)^2 = -2i$ فإن المعادلة (ج) تكتب على الشكل $z + 2\bar{z} = -2i$

إذا كان $z = x + iy$ فإن $\bar{z} = x - iy$ ومنه المعادلة (ج) تصبح $3x - iy = -2i$

وهذه الأخيرة تكافئ $3x = 0$ و $-y = -2$ أي $x = 0$ و $y = 2$ ومنه $z = 2i$

(د) $z^2 - \bar{z}^2 = 0$ يكافئ $x^2 - y^2 + 2ixy - (x^2 - y^2 - 2ixy) = 0$

يكافئ $4ixy = 0$ يكافئ $xy = 0$

$xy = 0$ يكافئ $(x = 0)$ أو $(y = 0)$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $\{iy, x\}$

تطبيق 13

تبسيط أعداد

بسّط العددين التاليين $z_1 = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta}$ ، $z_2 = (3 + i)^4$

✓ الحل

(أ) $z_1 = \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta + i \sin \theta)}{(\cos \theta - i \sin \theta)(\cos \theta + i \sin \theta)} = \frac{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + i(\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta)}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$

$= \frac{\cos 2\theta + i \sin 2\theta}{1} = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$

(ب) $z_2 = (3 + i)^2 (3 + i)^2$

$= (9 - 1 + 6i)^2 = 64 - 36 + 96i = 28 + 96i$

تطبيق 14

إثبات أن عددا مركبا يكون حقيقيا

z و z' عدنان مركبان بحيث $z \neq -1$ و $z' \neq -1$ و $z = z' \bar{z}' = 1$ و $z' = \frac{z + z'}{1 + z \bar{z}'}$ عند حقيقي.

✓ الحل

$\frac{z + z'}{1 + z \bar{z}'} = \frac{z + z'}{1 + z \bar{z}'}$ حقيقي هذا معناه أن $\frac{z + z'}{1 + z \bar{z}'}$

$\left(\frac{z + z'}{1 + z \bar{z}'} \right) = \frac{\bar{z} + \bar{z}'}{1 + \bar{z} \times \bar{z}'} = \frac{1 + \frac{1}{z}}{1 + \frac{1}{z} \times \frac{1}{z'}} = \frac{z + z'}{1 + z \bar{z}'}$

ومنه نستنتج أن $\frac{z + z'}{1 + z \bar{z}'}$ حقيقي.

تطبيق 15

تعيين مجموعة النقط

u عدد مركب غير معلوم.

عين مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z بحيث :

$\left(\frac{u - \bar{u}z}{1 - z} \right)$ حقيقي

✓ الحل

$\frac{u - \bar{u}z}{1 - z} - \overline{\left(\frac{u - \bar{u}z}{1 - z} \right)} = 0$ حقيقي هذا معناه أن $\frac{u - \bar{u}z}{1 - z}$

$\frac{u - \bar{u}z}{1 - z} - \frac{\bar{u} - u \times \bar{z}}{1 - \bar{z}} = \frac{u - \bar{u}z - u\bar{z} + \bar{u}z\bar{z}}{(1 - z)(1 - \bar{z})} = \frac{z\bar{z}(\bar{u} - u) + u}{(1 - z)(1 - \bar{z})}$

إذن لكي يكون $\frac{u - \bar{u}z}{1 - z}$ حقيقيا يجب أن يكون $\frac{z\bar{z}(\bar{u} - u) + u}{(1 - z)(1 - \bar{z})} = 0$

أي $z\bar{z}(\bar{u} - u) = -u$ (1)

بما أن $u - \bar{u}$ تخيلي صرف و $z\bar{z}$ حقيقي فإن u تخيلي صرف

وبالتالي $u = bi$ مع $b \in \mathbb{R}^*$

إذا كان $z = x + iy$ فإن المساواة (1) تكتب $2bi = bi$ تكتب

وبقسمة طرفي المساواة الأخيرة على $2bi$ نجد $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$

إذن مجموعة النقط M بحيث $\frac{u-\bar{u}z}{1-z}$ حقيقي هي دائرة (ع) مركزها $O(0, 0)$ ونصف قطرها $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

تطبيق 16

تعيين طولية عدد مركب

عين طولية كل عدد من الأعداد المركبة التالية:
(أ) $z = \sqrt{2} + i$ ، (ب) $z = \sqrt{2} - i\sqrt{3}$ ، (ج) $z = \cos\theta + i\sin\theta$
(د) $z = \cos\theta - i\sin\theta$ ، (هـ) $z = \sin\theta + i\cos\theta$ ، (و) $z = (2-3i)(1+5i)$
(ن) $z = (1-2i)^3$ ، (ي) $z = \frac{4}{(1+i)^2}$ ، (ف) $z = \frac{a+ib}{a-ib}$
حيث a و b حقيقيين غير معلومين.

الحل

$$\begin{aligned} (أ) \quad |z| &= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3} \\ (ب) \quad |z| &= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{5} \\ (ج) \quad |z| &= \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1 \\ (د) \quad |z| &= \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1 \\ (هـ) \quad |z| &= \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1 \\ (و) \quad |z| &= |2-3i||1+5i| = \sqrt{2^2+3^2}\sqrt{1^2+5^2} = \sqrt{338} \\ (ن) \quad |z| &= |(1-2i)^3| = |1-2i|^3 = (\sqrt{1^2+2^2})^3 = (\sqrt{5})^3 = 5\sqrt{5} \\ (ي) \quad |z| &= \left| \frac{4}{(1+i)^2} \right| = \frac{4}{|1+i|^2} = \frac{4}{(\sqrt{2})^2} = 2 \\ (ف) \quad |z| &= \left| \frac{a+ib}{a-ib} \right| = \frac{|a+ib|}{|a-ib|} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1 \end{aligned}$$

تطبيق 17

تعيين مجموعة النقط باستعمال الطولية

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق الشرط المعطى:
(أ) $|z| = 2$ ، (ب) $|z-1+2i| = 2$ ، (ج) $|z-1| = 4$ ، (د) $|z-2i| = |z|$
(هـ) $|z+1| = 2$ ، (و) $|z+1-2i| = |\bar{z}-i|$ ، (ن) $|2z+4| = |1-2z|$

الحل

بوضع $z = x+iy$ يكون $\bar{z} = x-iy$
(أ) $|z| = 2$ تعني $\sqrt{x^2+y^2} = 2$ وبترتيب الطرفين نجد $x^2+y^2=4$
وبالتالي مجموعة النقط M هي دائرة مركزها $O(0,0)$ ونصف قطرها 2.
(ب) لدينا $|z-1+2i| = \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}$ ومنه $|z-1+2i| = \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}$
وبالتالي مجموعة النقط M هي دائرة مركزها $A(1,-2)$ ونصف قطرها 2.
(ج) المساواة $|z-1| = 4$ تعني $|(x-1)+iy| = 4$
لكن $|(x-1)+iy| = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$
إذن المساواة $|z-1| = 4$ تصبح $(x-1)^2+y^2=16$
وعليه مجموعة النقط M هي دائرة مركزها $A(1,0)$ ونصف قطرها 4.
(د) لدينا $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ و $|z-2i| = \sqrt{x^2+(y-2)^2}$
المساواة $|z| = |z-2i|$ تعني $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-2)^2}$ وبترتيب الطرفين نجد
 $x^2+y^2 = x^2+(y-2)^2$ وبالتبسيط نجد $-y+1=0$
ومنه مجموعة النقط M هي مستقيم معادلته $y=1$.
(هـ) المساواة $|\bar{z}+i| = 2$ تعني $|x+i(-y+1)| = 2$ أي $\sqrt{x^2+(-y+1)^2} = 2$
بترتيب الطرفين نجد $x^2+(y-1)^2=4$
وبالتالي مجموعة النقط M هي دائرة مركزها $A(0,1)$ ونصف قطرها 2.
(و) لدينا $|z+1-2i| = |(x+1)+i(y-2)| = \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$
 $|\bar{z}-i| = |x-i(y+1)| = \sqrt{x^2+(y+1)^2}$
المساواة $|\bar{z}-i| = |z+1-2i|$ تكافئ $\sqrt{x^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$
بترتيب الطرفين نجد $x^2+(y+1)^2 = (x+1)^2+(y-2)^2$
وبالتبسيط نجد $x-3y+2=0$
ومنه مجموعة النقط M هي مستقيم معادلته $x-3y+2=0$.
(ن) لدينا $|2z+4| = |(2x+4)+2iy| = \sqrt{(2x+4)^2+4y^2}$
 $|1-2z| = |(1-2x)+i(-2y)| = \sqrt{(1-2x)^2+4y^2}$
المساواة $|2z+4| = |1-2z|$ تكافئ $\sqrt{(2x+4)^2+4y^2} = \sqrt{(1-2x)^2+4y^2}$
بترتيب الطرفين نجد $(2x+4)^2 = (1-2x)^2$ وبالتبسيط نجد $4x-3=0$
ومنه مجموعة النقط M هي مستقيم معادلته $x = \frac{3}{4}$.

تطبيق 18

تعيين طبيعة أشكال

نقاط C, B, A ثلاث نقاط لواقعها على التوالي $4+3i, 2+i, 5i$

(أ) عين لاحقتي الشعاعين \vec{AC}, \vec{AB} ثم احسب طوليه كل منها، واستنتج طبيعة المثلث ABC .

(ب) عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ معيناً.

الحل

(أ) لاحقة الشعاع \vec{AB} هي $z_B - z_A$

$$z_B - z_A = 2 + i - 5i = 2 - 4i$$

لاحقة الشعاع \vec{AC} هي $z_C - z_A$

$$z_C - z_A = 4 + 3i - 5i = 4 - 2i$$

$$|\vec{AB}| = |z_B - z_A| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$|\vec{AC}| = |z_C - z_A| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

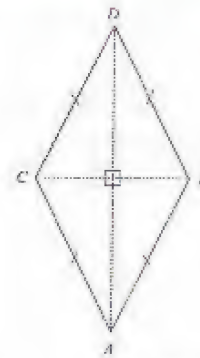
بما أن $AB = AC$ فإن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه الأساسي A .

(ب) $ABCD$ معين يعني $\vec{AB} = \vec{CD}$

وهذا يعني أيضاً $z_B - z_A = z_D - z_C$

$$z_D = z_B - z_A + z_C$$

$$z_D = 2 + i - 5i + 4 + 3i = 6 - i$$



تعيين عمدة عند مركب

تطبيق 19

بقراءة بيانية اعط العمدة بالراديان لكل من لواقع مايلي:

(أ) النقاط E, D, B, A

(ب) الأشعة $\vec{DA}, \vec{OE}, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AC}$

الحل

$$\arg(z_A) = (\vec{OI}, \vec{OA}) + 2k\pi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$



$$\arg(z_A) = (\vec{OI}, \vec{OA}) + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg(z_D) = (\vec{OI}, \vec{OD}) + 2k\pi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg(z_E) = (\vec{OI}, \vec{OE}) + 2k\pi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\arg(z_{AC}) = (\vec{OI}, \vec{AC}) + 2k\pi \quad (ب) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg(z_{AD}) = (\vec{OI}, \vec{AD}) + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\arg(z_{AB}) = (\vec{OI}, \vec{AB}) + 2k\pi = (\vec{OI}, \vec{AD}) + (\vec{AD}, \vec{AB}) + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\arg(z_{OE}) = (\vec{OI}, \vec{OE}) + 2k\pi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\arg(z_{DA}) = (\vec{OI}, \vec{DA}) + 2k\pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

تعيين عدد مركب علمته عمده

تطبيق 20

A و B نقطتان لواقعتهما على الترتيب $2-5i$ و $1+2i$

و M نقطة مختلفة عن A و B لواقعتهما z .

(أ) عين لاحقتي الشعاعين \vec{BM}, \vec{AM}

(ب) أوجد عدداً مركباً علمته هي قيس للزاوية (\vec{AM}, \vec{BM})

الحل

(أ) لاحقة الشعاع \vec{AM} هي $z_M - z_A$

$$z_M - z_A = (x+iy) - (2-5i) = (x-2) + i(y+5)$$

لاحقة الشعاع \vec{BM} هي $z_M - z_B$

$$z_M - z_B = (x+iy) - (1+2i) = (x-1) + i(y-2)$$

(ب) ليكن Z' عددا مركبا عمده (\vec{AM}, \vec{BM})

$$\arg(Z') = (\vec{AM}, \vec{BM}) = \arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right)$$

ومنه Z' هي أحد الأعداد المركبة التي تكتب على الشكل $\alpha \frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}$ حيث $\alpha > 0$

تمرين 21 تعيين مجموعة النقاط باستعمال العمدة

تطبيق 21

عين مجموعة النقاط M ذات اللاحقة z بحيث:

$$\arg(z+2i) = \frac{-\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

الحل

$$z+2i = x + i(y+2)$$

$$r = |z+2i| \quad \text{و} \quad \arg(z+2i) = \theta$$

$$\tan \theta = \frac{y+2}{x} \quad \text{ومنه} \quad \sin \theta = \frac{y+2}{r} \quad \text{و} \quad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \quad \text{فإن} \quad \theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{وعليه} \quad y = \frac{-\sqrt{2}}{2}x - 2 \quad \text{إذن} \quad \frac{y+2}{x} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

تمرين 22 تعيين القيمة الضبوطة لـ $\sin \frac{\pi}{12}$ و $\cos \frac{\pi}{12}$

تطبيق 22

$$z_2 = 1-i \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$$

$$(1) \text{ اعط الشكل المثلثي لكل من الأعداد } z_1, z_2 \text{ و } \frac{z_1}{z_2}$$

$$(2) \text{ اعط الشكل الجبري لـ } \frac{z_1}{z_2} \text{ ثم استنتج قيمة كل من } \sin \frac{\pi}{12} \text{ و } \cos \frac{\pi}{12}$$

الحل

$$(1) \text{ لدينا } |z_1| = \sqrt{\frac{6+2}{4}} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{2} \end{cases} \quad \text{نضع} \quad \arg(z_1) = \theta_1 \quad \text{تحقق}$$

$$z_1 = \left[\sqrt{2}, \frac{-\pi}{6} \right] \quad \text{إذن} \quad \theta_1 = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\text{لدينا } |z_2| = \sqrt{2} \quad \text{و} \quad \theta_2 = \arg(z_2) \quad \text{تحقق} \quad \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{ومنه} \quad \theta_2 = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{إذن} \quad z_2 = \left[\sqrt{2}, \frac{-\pi}{4} \right]$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{-\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{-2\pi + 3\pi}{12} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{إذن} \quad \frac{z_1}{z_2} = \left[1, \frac{\pi}{12} \right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{4} \quad (2)$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

بالمطابقة بين الشكل الجبري والمثلثي لـ $\frac{z_1}{z_2}$ نجد:

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{و} \quad \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

تمرين 23 كتابة عدد مركب على شكله المثلثي

تطبيق 23

اكتب على الشكل المثلثي كل من الأعداد المركبة التالية:

$$z = (1+i)\left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}\right) \quad (1)$$

$$z = (\sqrt{3} + i)^{2007} \quad (ب)$$

$$z = (\cos \theta - i \sin \theta)^6 \quad (ج)$$

$$z = (1+i\sqrt{3})^3 + (1-i\sqrt{3})^3 \quad (د)$$

الحل ✓

(أ) z هو جذاء لعددين مركبين هما $z_1 = 1 + i$ و $z_2 = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$

$$z_1 = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right] \text{ و } z_2 = \left[1, \frac{\pi}{8} \right] \text{ ومنه } z = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \right]$$

$$z = \left[\sqrt{2}, \frac{3\pi}{8} \right] \text{ إذن}$$

(ب) بوضع $z_1 = \sqrt{3} + i$ يكون $z = z_1^{2007}$

$$z_1 = \left[2, \frac{\pi}{6} \right] \text{ ومنه } z = \left[2^{2007}, \frac{2007\pi}{6} \right]$$

$$z = \left[2^{2007}, \frac{\pi}{2} \right] \text{ ومنه } \frac{2007\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 334\pi$$

(ج) نضع $z_1 = \cos \theta - i \sin \theta$ ومنه $z = z_1^5$

$$z_1 = [1, -\theta] \text{ ومنه } z = [1, -\theta]$$

$$z = (1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5 = \left[2, \frac{\pi}{3} \right]^5 + \left[2, -\frac{\pi}{3} \right]^5$$

$$= [32, 5\frac{\pi}{3}] + [32, -5\frac{\pi}{3}] = 64 \cos 5\frac{\pi}{3} = 32\sqrt{3}$$

$$z = [32\sqrt{3}, 0] \text{ ومنه}$$

تطبيق 24

مهمة: توظيف دستور موافق

كيف يمكن اختيار العدد الطبيعي n حتى يكون $(\sqrt{3} + i)^n$ حقيقيا؟
حقيقيا موجبا؟ تخيليا صرفا؟

الحل ✓

نضع $z = \sqrt{3} + i$ ، الشكل المثلثي لـ z هو $z = \left[2, \frac{\pi}{6} \right]$

$$z^n = \left[2^n, \frac{n\pi}{6} \right] \text{ ومنه}$$

- يكون z^n حقيقيا إذا كان $\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0$ أي $\frac{n\pi}{6} = k\pi$ مع $k \in \mathbb{N}$

ومنه نجد $n = 6k$

ومنه مجموعة قيم n المطلوبة هي مضاعفات العدد 6.

- يكون z^n حقيقيا موجبا إذا كان $\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \geq 0$ و $\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0$

وهذا يعني أيضا $n = 6k$ و $\cos k\pi \geq 0$ لكن $\cos(k\pi) = (-1)^k$

إذن حتى يكون $\cos(k\pi) \geq 0$ يجب أن يكون k زوجي

أي $k = 2k'$ ومنه $n = 12k'$

إذن مجموعة قيم n المطلوبة هي مضاعفات العدد 12.

- يكون z^n تخيليا صرفا إذا كان $\cos \frac{n\pi}{6} = 0$

ومنه ينتج $\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{N}$

ومنه نجد $n = 3 + 6k$ مع $k \in \mathbb{N}$

إذن قيم n المطلوبة هي متتالية حسابية حدها الأول 3 وأساسها 6.

تطبيق 25

مهمة: تعيين عمدة عدد مركب

أوجد عمدة العدد المركب z وذلك حسب قيم العدد الحقيقي x ،

$$z = \sqrt{2}(x^2 - 3x + 2)(\cos \theta + i \sin \theta)$$

الحل ✓

$$|z| = \left| \sqrt{2}(x^2 - 3x + 2) \right| = \begin{cases} \sqrt{2}(x^2 - 3x + 2) & , x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[\\ -\sqrt{2}(x^2 - 3x + 2) & , x \in]1, 2[\\ 0 & , x = 1 \text{ أو } x = 2 \end{cases}$$

الحالة الأولى: $x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

لتكن $\arg(z) = \alpha$ تحقق $\begin{cases} \cos \alpha = \cos \theta \\ \sin \alpha = \sin \theta \end{cases}$ (I) ومنه $\tan \alpha = \tan \theta$

$$\begin{cases} \alpha = \theta + 2k'\pi \\ \alpha = \theta + \pi + 2k'\pi \end{cases} \text{ تكافئ } \alpha = \theta + k\pi \text{ تكافئ } \tan \alpha = \tan \theta$$

(I) لا تحقق الجملة $\alpha = \pi + \theta + 2k'\pi$

و $\alpha = \theta + 2k'\pi$ تحقق الجملة (I) ومنه $z = \left[\sqrt{2}(x^2 - 3x + 2), \theta \right]$

الحالة الثانية: $x \in]1, 2[$

$$|z| = -\sqrt{2}(x^2 - 3x + 2)$$

و $\arg(z) = \alpha$ تحقق $\begin{cases} \cos \alpha = -\cos \theta \\ \sin \alpha = -\sin \theta \end{cases}$ (II) ومنه $\tan \alpha = \tan \theta$

$$\tan \alpha = \tan \theta \text{ تكافئ } \alpha = \theta + \pi + 2k\pi \text{ أو } \alpha = \theta + 2k\pi$$

(II) لا تحقق الجملة $\alpha = \theta + \pi + 2k\pi$

و $\alpha = \theta + 2k\pi$ لا تحقق (II) ومنه $z = \left[-\sqrt{2}(x^2 - 3x + 2), \theta + \pi \right]$

تطبيق 26

إثبات أن أربع نقاط تقع على نفس الدائرة

نعتبر النقاط A, B, C, D لواقعها على الترتيب،
 $z_D = 4 - 3i$ ، $z_C = 3i$ ، $z_B = 4 + 3i$ ، $z_A = -1 + 2i$
 (أ) احسب $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$ و $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B}$
 (ب) ماهي طبيعة المثلثين ACD و BCD ؟
 (ج) بين أن النقاط A, B, C, D تقع على دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

الحل

$$\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{3i + 1 - 2i}{4 - 3i + 1 - 2i} = \frac{1+i}{5-5i} = \frac{(1+i)^2}{5(1-i)(1+i)} = \frac{-2i}{10} = \frac{-i}{5} \quad (1)$$

$$\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = \frac{3i - 4 - 3i}{4 - 3i - 4 - 3i} = \frac{-4}{-6i} = \frac{-4i}{6} = \frac{-2i}{3}$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (ب)$$

ومنه فإن المثلثين ACD و BCD قائمان في A و B على الترتيب.

(ج) بما أن ACD قائم في A فإن النقاط A, C, D تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها I منتصف $[DC]$

لكي تنتمي B إلى الدائرة (C) يكفي أن نبين أن $IB = IA$.

$z_I = 2$ ومنه $IB = \sqrt{13}$ و $IA = \sqrt{13}$ إذن B تنتمي إلى (C)

وعليه النقاط A, B, C, D تنتمي إلى نفس الدائرة (C) .

تطبيق 27

الأعداد المركبة والمتتالية الهندسية

$$(z_n) \text{ متتالية الأعداد المركبة معرفة بـ } \begin{cases} z_0 = 4 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}(1+i)z_n \end{cases} \text{ مع } n \in \mathbb{N}$$

(1) أوجد عمدة وطويلة كل من z_1, z_2, z_3, z_4, z_5

(2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $\Delta_n = |z_{n+1} - z_n|$

(أ) احسب Δ_{n+1} بدلالة Δ_n .

(ب) بين أن المتتالية (Δ_n) هندسية يطلب إيجاد حدها الأول وأساسها.

(ج) احسب Δ_n واستنتج العدد الطبيعي n_0 بحيث لا $n \geq n_0$ يكون $\Delta_n < 10^{-2}$

الحل

$$\alpha = \frac{1}{2}(1+i) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right] \text{ و } z_0 = [4, 0] \quad (1)$$

$$z_1 = \left[2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right] \text{ ومنه } z_1 = \alpha z_0$$

$$z_2 = \left[2, \frac{\pi}{2}\right] \text{ ومنه } z_2 = \alpha z_1$$

$$z_3 = \left[\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right] \text{ ومنه } z_3 = \alpha z_2$$

$$z_4 = [1, \pi] \text{ ومنه } z_4 = \alpha z_3$$

$$z_5 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\pi}{4}\right] \text{ ومنه } z_5 = \alpha z_4$$

$$\Delta_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = \left|\frac{1}{2}(1+i)z_{n+1} - \frac{1}{2}(1+i)z_n\right| \quad (1-2)$$

$$= \left|\frac{1}{2}(1+i)\right| |z_{n+1} - z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Delta_n$$

(ب) من المساواة $\Delta_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Delta_n$ نستنتج أن (Δ_n) متتالية هندسية أساسها $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

وحدها الأول $\Delta_0 = |z_1 - z_0| = 2\sqrt{2}$ ومنه $\Delta_n = \Delta_0 \times r^n = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

$$\Delta_n < 10^{-2} \text{ يكافئ } 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n < 10^{-2} \text{ يكافئ } 2^{-\frac{1}{2}n + \frac{3}{2}} < 10^{-2}$$

$$\text{يكافئ } -\frac{1}{2}n + \frac{3}{2} < -\frac{2 \ln(10)}{\ln(2)} \text{ يكافئ } -\frac{1}{2}n < -8,15$$

أصغر عدد طبيعي n_0 هو 17.

تطبيق 28

كتابة عدد مركب على الشكل المثلثي

$u = 1+i$ عدد مركب حيث

(1) اكتب كل من u و \bar{u} على الشكل المثلثي

(2) ليكن n عدد طبيعي، نضع $S_n = u^n + \bar{u}^n$

(أ) اكتب S_n على الشكل المثلثي ثم استنتج أن $S_n = \lambda_n \cos \frac{n\pi}{4}$

حيث λ_n عدد حقيقي يطلب إيجاد بدلالة n .

(ب) أوجد قيمة n بحيث $S_n = 0$

(ج) بين أنه إذا كان n زوجيا فإن S_n عدد صحيح.

✓ الحل

(1) الشكل الثنائي للعدد u و \bar{u} هما $u = [\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}]$ و $\bar{u} = [\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}]$

$$S_n = \left[(\sqrt{2})^n, \frac{n\pi}{4} \right] + \left[(\sqrt{2})^n, -\frac{n\pi}{4} \right] = 2(\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4} \quad (2)$$

$$\text{ومنه } S_n = 2(\sqrt{2})^n$$

(ب) $S_n = 0$ تكافئ $\cos \frac{n\pi}{4} = 0$ تكافئ $\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{ومنه } n = 2 + 4k$$

(ج) n زوجي هذا معناه أن $n = 2n'$ ومنه $S_n = 2(\sqrt{2})^{2n'} \cos \frac{n'\pi}{2}$

$$S_n = 2 \times \left[(\sqrt{2})^2 \right]^{n'} \times \cos \frac{n'\pi}{2}$$

$$= 2 \times (2)^{n'} \cos \frac{n'\pi}{2} = 2^{n'+1} \cos \frac{n'\pi}{2}$$

من أجل كل عدد طبيعي n' فإن $\cos \frac{n'\pi}{2}$ يأخذ القيم $1, 0, -1$

وبالتالي نستنتج أن S_n عدد صحيح.

تطبيق 29

تطبيق 29

أ. ب. ج. ثلاث نقاط من المستوى لواحظها $1, 2i, z$ على التوالي.

(1) ماذا تمثل ههنا $\arg \left(\frac{z-2i}{1-2i} \right)$ و $\left| \frac{z-2i}{1-2i} \right|$ ؟

(2) في مايلي نرمز بـ α إلى العدد الحقيقي من المجال $]-\pi, 0]$ بحيث $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$

النقطة C معرفة بـ $BC = \sqrt{\frac{2}{5}} BA$ و $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \right) = \alpha$

احسب القيمة الضبوطة لـ $\sin \alpha$

(3) بين أن $\frac{z-2i}{1-2i} = \frac{1-3i}{5}$ واستنتج قيمة z

(4) علم النقطة C، ثم تحقق أن المثلث ABC متقايس الساقين رأسه الأساسي A.

✓ الحل

$$\left| \frac{z-2i}{1-2i} \right| = \left| \frac{z-z_B}{z_A-z_B} \right| = \frac{BC}{BA} \quad (1)$$

$$\arg \left(\frac{z-2i}{1-2i} \right) = \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

(2) لدينا $\cos \alpha^2 + \sin \alpha^2 = 1$ ومنه $\sin \alpha^2 = \frac{9}{10}$

ومنه ينتج $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ أو $\sin \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

بما أن $\cos \alpha > 0$ فإن $\alpha \in]-\pi, 0]$ فإن $\sin \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

$$\frac{BC}{BA} = \left| \frac{z-2i}{1-2i} \right| = \sqrt{\frac{2}{5}} \quad (3)$$

$$\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \right) = \arg \left(\frac{z-2i}{1-2i} \right) = \alpha$$

$$\text{ومنه } \frac{z-2i}{1-2i} = \sqrt{\frac{2}{5}} \left(\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{3}{\sqrt{10}}i \right) = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i = \frac{1}{5}(1-3i)$$

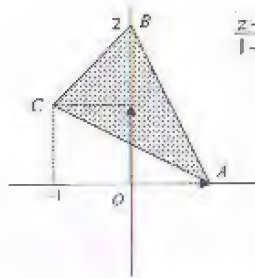
استنتاج قيمة z

$$\text{من المساواة } \frac{z-2i}{1-2i} = \frac{1-3i}{5} \text{ نجد } z-2i = -1-i$$

$$\text{اذن } z = -1+i$$

$$(4) \text{ لدينا } AB = |z_B - z_A| = \sqrt{5} \text{ و } AC = |z_C - z_A| = \sqrt{5}$$

ومنه ABC مثلث متقايس الساقين رأسه الأساسي A.



تطبيق 30

تطبيق 30

z_1 و z_2 عدنان مركبان حيث $z_1 = -1-i$ و $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

(1) اكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكلين الجبري والاسي.

(2) استنتج طوليلة و عمدة $\frac{z_1}{z_2}$ ثم عين القيمة الضبوطة لكل من:

$$\cos \frac{11\pi}{12} \text{ و } \sin \frac{11\pi}{12}$$

✓ الحل

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1-i}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (\vec{OA}, \vec{OB}) &= \arg \left(\frac{-z_B}{z_A} \right) = \arg(z_B) - \arg(z_A) \quad (2) \\ &= -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

ومن ثم \vec{OA} عمودي على \vec{OB} وعليه الرباعي $OACB$ مستطيل.

تطبيق 32

مجموع الكتابة الأسية ودساتير التحويل

θ عدد حقيقي يختلف عن $\pi + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ و $t = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}$

(1) احسب $\frac{2t}{1+t^2}$ و $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ بدلالة θ

(2) بين أن $\cos \theta = \frac{1 - \tan^2(\frac{\theta}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\theta}{2})}$ و $\sin \theta = \frac{2 \tan(\frac{\theta}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\theta}{2})}$

و $\tan \theta = \frac{2 \tan(\frac{\theta}{2})}{1 - \tan^2(\frac{\theta}{2})}$

✓ الحل

$$t = \frac{2i \sin \frac{\theta}{2}}{2 \cos \frac{\theta}{2}} = i \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1 - \tan^2(\frac{\theta}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\theta}{2})}, \quad \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2i \tan(\frac{\theta}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\theta}{2})}, \quad \frac{2t}{1-t^2} = \frac{2i \tan(\frac{\theta}{2})}{1 - \tan^2(\frac{\theta}{2})}$$

$$(1) \dots \dots \dots \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} = \frac{1}{\cos \theta} + i \tan \theta \quad (2)$$

$$(2) \dots \dots \dots \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} = \frac{1 + \tan^2(\frac{\theta}{2})}{1 - \tan^2(\frac{\theta}{2})} + \frac{2i \tan(\frac{\theta}{2})}{1 - \tan^2(\frac{\theta}{2})}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1 + \tan^2(\frac{\theta}{2})}{1 - \tan^2(\frac{\theta}{2})} \\ \tan \theta = 2 \frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{1 - \tan^2(\frac{\theta}{2})} \end{cases} \quad \text{من (1) و (2) نجد}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)}{1} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{و} \quad z_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4} - i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{2} e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

$$\arg \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{11\pi}{12} + 2\pi k \quad \text{و} \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \sqrt{2} \quad (2)$$

$$(1) \dots \dots \dots \frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$$

$$(2) \dots \dots \dots \frac{z_1}{z_2} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \cos \frac{11\pi}{12} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin \frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{من (1) و (2) نجد}$$

مجموع الكتابة الأسية وطبيعة أشكال

تطبيق 31

A و B نقطتان لاحقتهما $Z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $Z_B = e^{-i\frac{\pi}{6}}$
(1) عين النقطة C بحيث الرباعي $OACB$ متوازي أضلاع حيث O مبدأ العلم
($\vec{O}, \vec{OA}, \vec{OB}$)

(2) عين قياسا للزاوية (\vec{OA}, \vec{OB}) ماذا تستنتج حول الرباعي $OACB$ ؟

✓ الحل

(1) $OACB$ متوازي أضلاع يعني $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ و $\vec{OA} = \vec{BC}$ و $\vec{OB} = \vec{AC}$

المساواة $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ تعني $z_C = z_B + z_A$

$$z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}} + 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\begin{aligned} z_C &= \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + 1 + \sqrt{3}i \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right) + i \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\tan \theta = \frac{2 \tan (\frac{\theta}{2})}{1 - \tan^2 (\frac{\theta}{2})} \quad \text{و} \quad \cos \theta = \frac{1 - \tan^2 (\frac{\theta}{2})}{1 + \tan^2 (\frac{\theta}{2})} \quad \text{ومنه}$$

$$\sin \theta = \cos \theta \times \tan \theta \quad \text{ولدينا}$$

$$\sin \theta = \frac{1 - \tan^2 (\frac{\theta}{2})}{1 + \tan^2 (\frac{\theta}{2})} \times \frac{2 \tan (\frac{\theta}{2})}{1 - \tan^2 (\frac{\theta}{2})} = \frac{2 \tan^2 (\frac{\theta}{2})}{1 + \tan^2 (\frac{\theta}{2})} \quad \text{إذن}$$

تطبيق 33

تطبيق 33

$$(1) \text{ احسب } u^7 \text{ حيث } u = e^{2i\frac{\pi}{7}}$$

$$(2) \text{ نضع } S = u + u^2 + u^4 \text{ و } T = u^3 + u^5 + u^6$$

بين أن S و T مترافقان وأن الجزء التخيلي لـ S عدد حقيقي موجب.

$$(3) \text{ احسب } S+T \text{ و } ST$$

$$(4) \text{ استنتج أن } \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{و } \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

الحل

$$(1) u^7 = (e^{2i\frac{\pi}{7}})^7 = e^{2i\pi} = 1$$

$$(2) \bar{S} = \overline{u + u^2 + u^4} = \bar{u} + \bar{u}^2 + \bar{u}^4 = \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^4} = \frac{u^3 + u^2 + 1}{u^4}$$

$$= \frac{u^6 + u^5 + u^3}{u^4} = u^2 + u^5 + u^3 = T$$

$$(\text{لأن } u^7 = 1 \text{ و } u\bar{u} = 1)$$

ومنه S و T مترافقان

$$\text{الجزء التخيلي لـ } T \text{ هو } \sin \frac{6\pi}{7} + \sin \frac{10\pi}{7} + \sin \frac{12\pi}{7}$$

$$\text{وبما أن الزوايا } \frac{6\pi}{7} \text{ و } \frac{10\pi}{7} \text{ و } \frac{12\pi}{7} \text{ تنتمي إلى }]\pi, 2\pi[$$

$$\text{فإن } \sin \frac{6\pi}{7} + \sin \frac{10\pi}{7} + \sin \frac{12\pi}{7} < 0$$

وبما أن الجزء التخيلي لـ S هو نظير الجزء التخيلي لـ T

$$\text{أي } \operatorname{Im}(S) = -\operatorname{Im}(T) \quad \text{فإن } \operatorname{Im}(S) > 0$$

$$(3) S+T = u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6$$

$$= 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 - 1$$

$$= \frac{1-u^7}{1-u} - 1 = -1$$

$$ST = (u + u^2 + u^4)(u^3 + u^5 + u^6) = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 + 2$$

$$= \frac{1-u^7}{1-u} + 2 = 2$$

$$\text{إذن } \begin{cases} S+T = -1 \\ ST = 2 \end{cases} \quad (1)$$

(4) من المساواة $S+T = -1$ نجد $T = -1-S$ نعوضه في المساواة $S \times T = 2$ نجد

$$S^2 + S + 2 = 0 \quad \text{وبعد حل هذه المعادلة نجد } S = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \quad \text{و } S = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{وبما أن الجزء التخيلي لـ } S \text{ موجب فإن } S = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{لدينا } S = (\cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}) + (\cos \frac{4\pi}{7} + i \sin \frac{4\pi}{7}) + (\cos \frac{8\pi}{7} + i \sin \frac{8\pi}{7})$$

بالمطابقة بين الشكل الجبري و الشكل المثلثي لـ S نجد

$$\begin{cases} \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2} \\ \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

تطبيق 34

تطبيق 34

في المستوى النسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$

$$z_0 = 6 + 6i \quad \text{و } z_n \text{ عدداً مركباً بحيث } z_n = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i \frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

ولكن A_0 صورة z_0

من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم n نرمز بـ A_n إلى النقطة ذات

اللاحقة z_n المعرفة بـ $z_n = a^n \times z_0$

(1) اكتب z_1 و a^3 على الشكل الجبري ثم اكتب z_1 على الشكل الأسّي

$$\text{وبين أن } a^2 = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$$

(ب) عبر عن z_3 ثم z_7 بدلالة z_1 و a^2 مستنتجاً عبارتي z_3 و z_7 على الشكل الأسّي

(2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $|z_n| = r_n$

$$(أ) \text{ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ يكون } r_n = 12 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n+1}$$

(ب) استنتج أن المتتالية (r_n) هندسية بطلب تعيين حدها الأول وأساسها

(ج) عين نهاية المتتالية (r_n) وفسر هندسيا النتيجة المحصل عليها.

(د) عين أصغر عدد طبيعي غير معلوم p بحيث $OA_p \leq 10^{-3}$

واعط قيسا للزاوية للوجهة $(\vec{OI}, \vec{OA_p})$

✓ الحل

$$z_1 = a^1 z_0 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4} + i \frac{\sqrt{3}-1}{4} \right) (6+6i) \quad (1)$$

$$z_1 = \left[\frac{3(\sqrt{3}+1)}{2} - \frac{3}{2}(\sqrt{3}-1) \right] + i \left[\frac{3}{2}(\sqrt{3}+1) + \frac{3}{2}(\sqrt{3}-1) \right]$$

$$z_1 = 3 + i3\sqrt{3}$$

$$a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4} + i \frac{\sqrt{3}-1}{4} \right)^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4} \right)^2 + 2i \frac{\sqrt{3}+1}{4} \times \frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

$$= \frac{4+2\sqrt{3}}{16} - \frac{4-2\sqrt{3}}{16} + 2i \frac{3-1}{16}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{16} + \frac{4i}{16} = \frac{4}{16}(\sqrt{3}+i)$$

$$z_1 = 6 e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{ومنه} \quad \arg(z_1) = \frac{\pi}{3} \quad \text{و} \quad |z_1| = 6$$

$$a^2 = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \text{ومنه} \quad \arg(a^2) = \frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad |a^2| = \frac{1}{2}$$

$$(ب) \quad \text{لدينا} \quad a^4 = \frac{1}{24} z_1^2$$

$$z_1 = a^7 z_0 = a^4 a^2 a z_0 = \frac{1}{24} z_1 a^2 z_1 = \frac{1}{24} a^2 z_1^2$$

$$z_1 = \frac{1}{24} \times \frac{1}{2} \times e^{i\frac{\pi}{6}} \times 36 e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{4} e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_3 = a^3 z_0 = a^2 z_1 = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{6}} \times 6 e^{i\frac{5\pi}{6}} = 3 e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$|a| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ومنه} \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (2)$$

$$|z_n| = |a^n| |z_0| = |a|^n \times |z_0|$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \times 6\sqrt{2} = 12 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 12 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n+1}$$

$$(ب) \quad \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ومنه} \quad |z_n| \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ وحدها الأول}$$

$$|z_0| = 12 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

$$(ج) \quad \text{بما أن } 0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \quad \text{فإن} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n+1} = 0 \quad \text{ومنه} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$$

$$\text{بما أن} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0 \quad \text{و} \quad |z_n| = \left| \vec{OA_n} \right|$$

فإنه كلما كبر n كلما اقتربت النقط A_n من النقطة O على مسار حلزوني.

$$(د) \quad OA_p < 10^{-3} \quad \text{هذا معناه أن} \quad |z_p| \leq 10^{-3} \quad \text{أي} \quad r_p \leq 10^{-3}$$

$$r_p \leq 10^{-3} \quad \text{تكافئ} \quad 12 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{p+1} \leq 10^{-3} \quad \text{تكافئ} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{p+1} \leq \frac{10^{-3}}{12}$$

$$\text{ومنه} \quad p+1 \geq \frac{\ln \left(\frac{10^{-3}}{12} \right)}{-\ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)}$$

$$\text{إذن} \quad p \geq 26.09$$

وبالتالي فإن أصغر عدد طبيعي p هو 27.

$$\text{حساب قياس الزاوية} \quad (\vec{OI}, \vec{OA_n})$$

$$\left(\vec{OI}, \vec{OA_p} \right) = \arg(z_{27}) = \arg(a^{27} \times z_0) + 2k\pi$$

$$= \arg(a^{27}) + \arg(z_0) + 2k\pi = \frac{\pi}{12} \cdot 27 + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$= \frac{30\pi}{12} + 2k\pi = \frac{5\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

تطبيق 36

حل معادلات من الدرجة الرابعة

نعتبر كثير الحدود $p(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$ حيث z عدد مركب

(1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث

$$p(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$$

(2) حل في \mathbb{C} المعادلة $p(z) = 0$

✓ الحل

(1) بعد نشر $(z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$ ومطابقته مع عبارة $p(z)$ نجد:

$$\begin{cases} a + 4 = 0 \\ 6a + b = -19 \\ 4b + 2a^2 = 52 \\ 2ab = -40 \end{cases} \text{ ومنه ينتج } \begin{cases} a = -4 \\ b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^2 - 4z + 5 = 0 \dots (1) \\ \text{أو} \\ z^2 + 4z - 8 = 0 \dots (2) \end{cases} \text{ يعني } p(z) = 0 \quad (2)$$

حل المعادلة (1) :

$$\Delta = 16 - 4(1)(5) = -4 = (2i)^2$$

$$z_2 = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i, \quad z_1 = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i$$

حل المعادلة (2) :

$$\Delta = 48 \text{ ومنه } \Delta = 16 - 4(1)(-8)$$

$$z_4 = \frac{-4 - 4\sqrt{3}}{2} = -2 - 2\sqrt{3}, \quad z_3 = \frac{-4 + 4\sqrt{3}}{2} = -2 + 2\sqrt{3}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $p(z) = 0$ هي $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$

تطبيق 36

حل معادلات من الدرجة الرابعة

من أجل كل عدد مركب z نضع $p(z) = z^4 - 1$
(1) حلل $p(z)$ إلى جداء كثيري حدود من الدرجة الثانية.
(ب) استنتج حلول المعادلة $p(z) = 0$ في \mathbb{C} .

(2) استنتج من السؤال السابق حلول المعادلة $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ (*) في \mathbb{C} .

✓ الحل

$$p(z) = (z^2 - 1)(z^2 + 1) \quad (1)$$

$$p(z) = 0 \text{ يعني } z^2 - 1 = 0 \text{ أو } z^2 + 1 = 0$$

$$\text{حلا المعادلة } z^2 - 1 = 0 \text{ هما } 1, -1$$

$$\text{حلا المعادلة } z^2 + 1 = 0 \text{ هما } i, -i$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $p(z) = 0$ هي $\{1, -1, i, -i\}$

$$(2) \text{ نضع } z' = \frac{2z+1}{z-1} \text{ عندئذ المعادلة (*) تصبح } z'^4 - 1 = 0 \text{ أي } z'^4 = 1$$

ومنه z' عنصر من $\{1, -1, i, -i\}$

$$z = \frac{z'+1}{z'-2} \text{ بكافئ } z' = \frac{2z+1}{z-1}$$

- إذا كان $z' = -1$ فإن $z = 0$

- إذا كان $z' = i$ فإن $z = -\frac{3}{5} - \frac{3}{5}i$

- إذا كان $z' = -i$ فإن $z = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

- إذا كان $z' = 1$ فإن $z = -2$

إذن مجموعة حلول المعادلة (*) هي $\{0, -\frac{3}{5} - \frac{3}{5}i, -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i, -2\}$

تطبيق 37

حل معادلات من الدرجة الثالثة

حل في \mathbb{C} المعادلة $z^3 - (3+4i)z^2 - 6(3-2i)z + 72i = 0$ (1)
مع العلم أنها تقبل حلا تخيليا صرفا.

✓ الحل

$z = iy$ حل تخيلي صرف للمعادلة (1) معناه ان :

$$(iy)^3 - (3+4i)(iy)^2 - 6(3-2i)(iy) + 72i = 0$$

$$-iy^3 + 3y^2 + 4y^2i - 18iy - 12y + 72i = 0$$

$$(3y^2 - 12y)i + (-y^3 + 4y^2 - 18y + 72) = 0$$

ومن المساواة الأخيرة ينتج $\begin{cases} 3y^2 - 12y = 0 \\ -y^3 + 4y^2 - 18y + 72 = 0 \end{cases}$ وبعد حل هذه الجملة نجد $y = 4$

إذن $z = 4i$ حل تخيلي لـ (1)

من أجل كل z من \mathbb{C} لدينا :

$$z^3 - (3+4i)z^2 - 6(3-2i)z + 72i = (z-4i)(z^2 + az + b)$$

بعد النشر والتبسيط والطايفة نجد $b = -18$ و $a = -3$

$$\text{المعادلة (1) تكافئ } z^2 - 3z - 18 = 0 \text{ أو } z = 4i \text{ (I)}$$

حل المعادلة (I)

$$\Delta = 9 - 4(1)(-18) = 81$$

$$\text{ومنه المعادلة (I) لها حلان } z_1 = \frac{3+9}{2} = 6 \text{ و } z_2 = \frac{3-9}{2} = -3$$

إذن المعادلة (1) لها ثلاثة حلول $4i, 6, -3$

تطبيق 38

حل معادلات وكتابة الحلول على الشكل المثلثي

ليكن α عددا حقيقيا من المجال $[0, \pi]$ و z عند مركب.

نعتبر كثير الحدود $p(z)$ المعرف بـ:

$$p(z) = z^3 - (1 - 2 \sin \alpha) z^2 + (1 - 2 \sin \alpha) z - 1$$

(1) بين أن $p(z) = (z-1) [z^2 + (2 \sin \alpha) z + 1]$

(2) حل في \mathbb{C} المعادلة $p(z) = 0$ ثم عين عمدة وطويلة كل حل.

الحل

$$(z-1) [z^2 + (2 \sin \alpha) z + 1] = z^3 + 2 \sin \alpha z^2 + z - z^2 - 2 \sin \alpha z - 1 = z^3 + (2 \sin \alpha - 1) z^2 + (1 - 2 \sin \alpha) z - 1 = p(z)$$

$$p(z) = 0 \text{ يكافئ } (z-1) = 0 \text{ أو } (z^2 + 2 \sin \alpha z + 1 = 0) \quad (2)$$

حل المعادلة $z^2 + 2 \sin \alpha z + 1 = 0$ (*)

$$\Delta = 4 \sin^2 \alpha - 4 = 4(-\cos^2 \alpha) = (2i \cos \alpha)^2$$

ليكن z_1, z_2 حلي المعادلة (*)

$$z_1 = \frac{-2 \sin \alpha + 2i \cos \alpha}{2} = -\sin \alpha + i \cos \alpha$$

$$z_2 = \frac{-2 \sin \alpha - 2i \cos \alpha}{2} = -\sin \alpha - i \cos \alpha$$

تعيين طويلة و عمدة الحلول،

الحل الأول هو 1 ومنه $|1| = 1$

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = -\sin \alpha \\ \sin \theta_1 = \cos \alpha \end{cases} \text{ تحقق } \arg(z_1) = \theta_1 \text{ و } |z_1| = 1$$

$$z_1 = \left[1, \frac{\pi}{2} + \alpha \right] \text{ إذن } \theta_1 = \frac{\pi}{2} + \alpha + 2k\pi$$

$$\begin{cases} \cos \theta_2 = -\sin \alpha \\ \sin \theta_2 = -\cos \alpha \end{cases} \text{ تحقق } \arg(z_2) = \theta_2 \text{ و } |z_2| = 1$$

$$z_2 = \left[1, \frac{3\pi}{2} - \alpha \right] \text{ إذن } \theta_2 = \frac{3\pi}{2} - \alpha$$

تطبيق 39

حل معادلات من الدرجة الرابعة

من أجل كل عدد مركب z نضع $p(z) = z^4 - z^3 + z^2 + 2$

(1) بين أنه إذا كان α حلا للمعادلة $p(z) = 0$ فإن $\bar{\alpha}$ حل آخر لهذه المعادلة.

(2) بين أن $(1+i)$ و $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ حلان للمعادلة $p(z) = 0$

(3) استنتج أن $p(z)$ هو جداء كثيري حدود من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية.

الحل

(1) α حل للمعادلة $p(z) = 0$ يعني $p(\alpha) = 0$

$$\alpha^4 - \alpha^3 + \alpha^2 + 2 = 0 \text{ أي } \overline{\alpha^4 - \alpha^3 + \alpha^2 + 2} = 0$$

وحسب خواص المرافق نجد $\alpha^4 - \alpha^3 + \alpha^2 + 2 = 0$ لكن $\alpha^4 - \alpha^3 + \alpha^2 + 2 = p(\bar{\alpha})$ لكن

$$p(\bar{\alpha}) = 0$$

وهذا يعني أن $\bar{\alpha}$ حل للمعادلة $p(z) = 0$.

(2) يمكنك التحقق أن $p(1+i) = 0$ و $p\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) = 0$

(3) بما أن $1+i = \alpha$ حل فإن $1-i$ حل أيضا

بما أن $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \beta$ حل فإن $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ حل أيضا

$$p(z) = (z-\alpha)(z-\bar{\alpha})(z-\beta)(z-\bar{\beta})$$

$$= [z^2 - (\alpha + \bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha}] [z^2 - (\beta + \bar{\beta})z + \beta\bar{\beta}] = [z^2 - 2z + 2] [z^2 + z + 1]$$

تطبيق 40

معادلة من الدرجة الثالثة بمعاملات مركبة

$p(z)$ كثير حدود معرف بـ:

$$p(z) = z^3 + (5i-6)z^2 + (9-24i)z + 13i+18$$

(1) بين أن المعادلة $p(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا صرفا يطلب تعيينه

(2) حل في \mathbb{C} المعادلة $p(z) = 0$.

(3) النقط A, B, C لواقعها على الترتيب z_0, z_1, z_2 حلول المعادلة

$p(z) = 0$ حيث $|z_2| > |z_1| > |z_0|$ ما نوع المثلث ABC ؟

الحل

(1) $z = iy$ حل للمعادلة $p(z) = 0$ هذا معناه أن $p(iy) = 0$ بعد الحساب نجد،

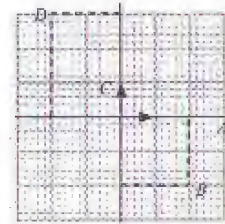
$$z = -i \text{ ومنه } y = -1$$

(2) لدينا $p(z) = (z+i) [z^2 + (4i-6)z + 13 - 18i]$

$$p(z) = 0 \text{ يكافئ } (z+i) = 0 \text{ أو } (z^2 + (4i-6)z - 18i = 0)$$

$$\text{نضع } z^2 + (4i-6)z - 18i = 0 \text{ (1)}$$

مَآرِنٌ وَمَسَائِلُ



اعتمادا على الشكل التالي عين لواحق :

(أ) النقاط A, B, C, D

(ب) الأشعة $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}$

اعط الشكل الجبري للأعداد المركبة التالية :

(أ) $z = (2+i)(3-2i)$ (ب) $z = (1-i)^5$ (ج) $z = (3+i)^2(1-i)$

(د) $z = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$ (هـ) $z = \frac{3-2i}{3+2i}$

(و) $z = \frac{1-2i}{2+i} - \frac{3}{2-i}$ (ن) $z = \left(\frac{2-3i}{1-i}\right)\left(\frac{1+3i}{-1+i}\right)$

حل في \mathbb{C} المعادلات والجمال المقترحة (اعطاء الحل على الشكل الجبري) :

(أ) $(1+3i)z = 2-i$ (ب) $(1+2i)z = 2+z$ (ج) $z^2 - (1-i)^2 = 0$

(د) $(z-4)(-iz+1) = 0$ (هـ) $z^2 - 9 = 0$ (و) $z^2 + 16 = 0$

(ن) $\frac{z+3}{z-3} = 2i$ (ي) $\begin{cases} z-z'=2 \\ iz-z'=2i \end{cases}$

نضع $z = x+iy$ حيث x و y عدنان حقيقيان :

نرفق بكل عدد مركب z العدد $Z = 2\bar{z} - 2 + 6i$

(أ) احسب بدلالة x و y الجزء الحقيقي والتخيلي لـ Z

(ب) هل يوجد عدد حقيقي z بحيث $Z = z$ ؟

من أجل كل عدد مركب $z \neq -1$ نضع $Z = \frac{z+\bar{z}}{1+\bar{z}}$ مع $z = x+iy$

(أ) احسب بدلالة x و y الجزء الحقيقي والتخيلي للعدد المركب Z

(ب) لاحتقه النقطة M في المستوى المركب

ما هي مجموعة النقاط M لا يكون Z تخيليا صرفا ؟

(6) عين الأعداد المركبة z بحيث العدد $\frac{z}{1-2i}$

(أ) عددا حقيقيا (ب) عددا تخيليا صرفا

(2) ارسم في المستوى المركب مجموعة النقاط M ذات اللاحقة z التي تحقق شرطي السؤال (1)

(7) عين مرافق كل عدد من الأعداد المركبة التالية :

(أ) $z = 8$ (ب) $z = i(5-3i)$ (ج) $z = (1+i)(3-5i)$

(د) $z = (2-3i)^7$ (هـ) $z = (3-2i)^4(5-i)^6$ (و) $z = \frac{4i-1}{3-i}$

(ن) $z = \frac{(1-i)^5}{3-i}$

(2) حل في \mathbb{C} المعادلات ذات المجهول z التالية :

(أ) $z - 2\bar{z} + 2 = 0$ (ب) $(1-i)\bar{z} = 1+i$

(ج) $\bar{z} + 1 - i = i\bar{z} + 3$ (د) $(3\bar{z} + 1 - i)(i\bar{z} + i - 1) = 0$

(هـ) $z + 2\bar{z} = (1-i)^2$ (و) $\frac{\bar{z}-2}{\bar{z}+2} = i$

(8) من أجل كل نقطة M ذات اللاحقة z نعتبر العدد المركب $z' = z^2$

(أ) نضع $z = x+iy$ مع x و y حقيقيان

(ب) عبر عن الجزء الحقيقي والحقيقي لـ z' بدلالة x و y

(ج) عين ثم ارسم مجموعة النقاط M بحيث يكون العدد z'

- حقيقيا

- تخيليا صرفا

(2) أوجد النتائج السابقة وهذا باستعمال خصائص المرافق.

(9) z عدد مركب بحيث $z = x+iy$ مع x و y حقيقيان

ليكن Z عددا مركبا بحيث $Z = iz - 2i + \bar{z} - 3$

(أ) احسب بدلالة x و y الجزء الحقيقي والتخيلي لـ Z

(ب) حل في \mathbb{C} المعادلة $Z = 0$ ذات المجهول z

(10) $z_1 = 1 + \cos x + i \sin x$ و $z_2 = 1 - \cos x - i \sin x$ عدنان مركبان حيث

(أ) اكتب كل من z_1 و z_2 على الشكل التلني

(ب) ليكن f عددا مركبا بحيث $f = \frac{z_1}{z_2}$

(أ) عين قيم x بحيث يكون العدد المركب f له معنى

(ب) بسط عبارة f وهذا باستعمال نتائج السؤال (أ) وباستعمال خصائص المرافق

11 ثلاث نقاط لواحقها الأعداد المركبة a, b, c على الترتيب.

بين أن ABC مثلث قائم في A يكافئ أن $\frac{b-a}{c-a} + \frac{\bar{b}-\bar{a}}{\bar{c}-\bar{a}} = 0$.

12 ثلاث نقاط لواحقها على التوالي $3+5i, 5+i, 7+3i$.

(1) عين لاحقتي الشعاعين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} ثم عين طوليهما كل منهما ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(2) عين النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ عبارة عن معين.

13 A و B نقطتان مختلفتان من المستوي المركب لاهقتيهما العددين المركبين a و b على الترتيب.

M نقطة كيفية لاهقتها العدد المركب z .

عين لاحقة النقطة M' نظيرة النقطة M بالنسبة إلى المستقيم (AB) .

14 ثلاث نقاط من المستوي المركب لواحقها الأعداد المركبة a, b, c على التوالي.

(1) بين أن النقط A, B, C على استقامة واحدة يكافئ أن:

$$a(\bar{b}-\bar{c}) + b(\bar{c}-\bar{a}) + c(\bar{a}-\bar{b}) = 0$$

(2) نفرض أن $A(1+i), B(1-i)$.

عين العلاقة بين z و \bar{z} بحيث تكون النقطة M ذات اللاحقة z تنتمي إلى المستقيم (AB) .

15 اكتب على الشكل المثلثي كل عدد من الأعداد المركبة التالية:

$$(1) z = \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)^7 \quad (ب) \quad z = (1-i)^{2007}$$

$$(ج) \quad z = (1-i) \left(\cos \frac{\pi}{11} + i \sin \frac{\pi}{11} \right) \quad (د) \quad z = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{10}$$

$$16 \quad z \text{ عند مركب بحيث } z = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(1) اكتب على الشكل الجبري الأعداد $z^2, z^3, z^4, z^5, z^{10}$.

(2) بين أن متتالية الأعداد المركبة z_n المعرفة بـ $z_n = z^n$ دورية يطلب تحديد دورها.

(3) نضع $S_n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n$.

(أ) احسب S_2 .

$$(ب) \text{ بين أن } S_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

(ج) بسط عبارة S_n $n=3p, n=3p+1, n=3p+2$ مع $p \in \mathbb{N}$.

$$17 \quad z \text{ عدد مركب بحيث } z = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$$

نضع $A = z + z^4$ و $B = z^2 + z^3$

(1) بين أن $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$ ثم استنتج أن A و B هما حلان للمعادلة (E)

$$x^2 + x - 1 = 0$$

(2) أوجد A بدلالة $\cos \frac{2\pi}{5}$

(3) حل المعادلة (E) ثم استنتج قيمة $\cos \frac{2\pi}{5}$

18 ثلاث نقاط لواحقها على التوالي $1+\sqrt{3}-i, 1+\sqrt{3}+i, 1-2i$.

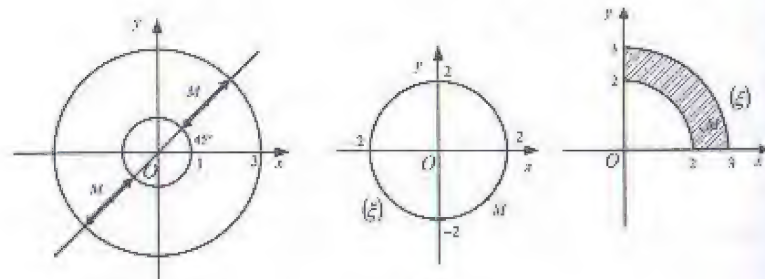
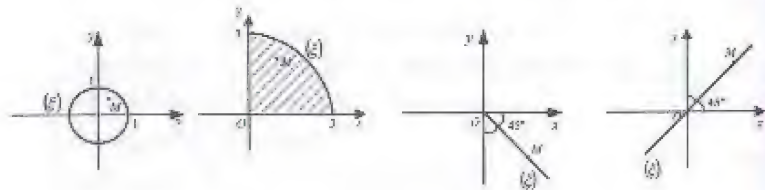
(1) بين أن النقط A, B, C تقع على نفس الدائرة التي مركزها O مبدا العلم.

(2) قارن بين z و \bar{z} ثم بين أن الرباعي $OABC$ عبارة عن معين.

19 في كل حالة من الحالات التالية مثلنا المجموعة (E) من النقاط M من المستوي ذات

$$z = [r, \theta]$$

غير بدلالة θ أو r أو كلاهما عن هذه المجموعة (E)



$$20 \quad \theta \text{ عند حقيقي من } \left[-\frac{\pi}{2}, 0 \right]$$

عين عمدة و طوليه العدد المركب $Z = \sin 2\theta - 2i \sin^2 \theta$

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z في كل حالة من الحالتين التاليتين و مثلها

$$(1) |z| = 2 |z-i|$$

$$(2) |z| \leq 2 |z-i|$$

في المستوي المركب، مثل مجموعة النقط M التي لواحقتها Z تحقق الشرط المعطى مع $(k \in \mathbb{Z})$

$$\arg(z) = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$\arg(\bar{z}) = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\arg(z+i) = \arg(z) + \arg(i) + 2\pi k$$

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر (O, \vec{OI}, \vec{OJ})

نعتبر النقط M_n ذات اللواحق z_n حيث $z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (1+i\sqrt{3})$ مع $n \in \mathbb{N}$

(1) عبر عن z_{n+1} بدلالة z_n ثم z_n بدلالة z_0 و n .

(ب) اكتب z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 على الشكل المثلثي والجبري.

(2) علم النقط M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 .

(3) عين للسافة OM_n بدلالة n .

(4) بين أن $M_n M_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{10}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

(ب) نضع $L_n = \sum_{k=0}^n M_k M_{k+1}$ عين L_n بدلالة n ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n$.

(5) أوجد قياسا للزاوية (\vec{OM}_0, \vec{OM}_n) بدلالة n .

من أجل أي قيمة n تكون النقط M_0, M_n على استقامة واحدة.

من أجل كل $n \geq 1$ نضع $S_n = \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n}$

$$(1) \text{ بين أن } S_n = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{2n}}$$

$$(2) \text{ ماهي } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{S_n}{n}\right) \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n)$$

25 $Z = (2\sqrt{3} + 2) + i(2\sqrt{3} - 2)$ عدد مركب بحيث

(1) عين الأعداد الطبيعية n بحيث Z^n تخيليا صرفا.

(2) عين الأعداد الطبيعية n بحيث Z^n حقيقيا سالبا، عبر عن Z^n بدلالة n .

26 المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر (O, \vec{OI}, \vec{OJ})

أربع نقط لواحقتها على التوالي،

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{3}}, c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, b = e^{i\frac{\pi}{3}}, a = 1$$

(1) اكتب c على الشكل الأسّي و d على الشكل الجبري.

(2) علم النقط A, B, C, D في العلم السابق.

(ب) بين أن الرباعي $OACB$ عبارة عن معين.

27 نضع $Z = re^{i\theta}$ مع $r > 0$ وليكن $Z_n = (z + \bar{z})(z^2 + \bar{z}^2) \times \dots \times (z^n + \bar{z}^n)$ مع $n \in \mathbb{N}^*$

(1) احسب Z_3 و Z_4 بدلالة r و θ .

(2) احسب Z_n بدلالة r و θ .

28 z_1 و z_2 عددان مركبان بحيث $|z_1| = |z_2| = 1$ عمدتهما على التوالي α و β .

(1) اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسّي.

(2) بين أن $\frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2}$ عدد حقيقي موجب تماما.

$$(1) \text{ بين أن } 1 + e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} = \frac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{5}}}$$

(2) استنتج من السؤال (1) قيمة كل من المجموعين S و T حيث:

$$S = \sum_{k=0}^4 \cos \frac{k\pi}{5}, \quad T = \sum_{k=0}^4 \sin \frac{k\pi}{5}$$

30 المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر (O, \vec{OI}, \vec{OJ})

A و B نقطتان لاحتاهما على التوالي -1 و 1 .

M نقطة لاحتها z_M حيث $z_M \neq 0$ ونسمي N النقطة ذات اللاحقة $\frac{1}{z_M}$

$$(1) \text{ بين أن } AN = \frac{AM}{OM}$$

(2) في كل ما يلي نفرض أن النقطة M تنتمي إلى دائرة مركزها B ونصف قطرها

$$r = \sqrt{2}$$

نضع $z_M = x + iy$ مع x و y حقيقيان.

$$(1) \text{ بين أن } x^2 + y^2 = 2x + 1$$

(ب) بين أن $|z_M + 1|^2 = 2|z_M|^2$ ثم استنتج الطول AM بدلالة OM .

(3) باستعمال السؤال (1) احسب الطول AN .

$$(4) \text{ باستعمال نتيجة السؤال (2) بين أن } 1 - \frac{1}{z_M} = \frac{1}{|z_M|^2} (z_M + 1)$$

(ب) استنتج أن الشعاعين \vec{AM} و \vec{NB} مرتبطان خطياً.

- عين طبيعة الرباعي $ANBM$ إذا كانت النقطة M لا تنتمي إلى المستقيم (AB) .

(ج) بين أنه إذا كان $|z_M| = 1$ فإن $|\vec{NB}| = |\vec{AM}|$ ثم حدد وضعيتي النقطة M الممكنة في كلتا الحالتين ثم عين طبيعة الرباعي $ANBM$.

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة التالية:

$$(1) \dots 4(1 - \sin \theta)z^2 - 2(1 + \cos 2\theta)z + 1 + \sin \theta = 0$$

$$\text{حيث } \theta \text{ من } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

(2) اوجد طويلة وعمدة حلول المعادلة (1) بدلالة θ .

عين الجذور التكعيبية للعدد المركب $4\sqrt{2}(1+i)$

ثم مثل صور هذه الجذور في المستوى المركب النسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة $z^3 - i = 0$ (1)

(1) حل في \mathbb{C} المعادلة (1) ثم اكتب الحلول على الشكل المثلثي.

(2) z_0 و z_1 حلي المعادلة (1) يختلفان عن $(-i)$ ، احسب $z_0 + z_1$ و $z_0 \times z_1$.

$$(3) \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة } z^3 - i = 6(z+1)$$

$$(34) \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة } z^6 + (2i-1)z^2 - 1 - i = 0$$

ليكن $p(z)$ كثير حدود معرف كما يلي $p(z) = z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i$

(1) بين أن المعادلة $p(z) = 0$ لها حل حقيقي ثم حل المعادلة $p(z) = 0$

(2) لتكن A, B, C نقط من المستوى النسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

(O, \vec{i}, \vec{j}) لواقعها حلول المعادلة $p(z) = 0$ حيث C فاصلتها (-1)

برهن أن النقطة O هي مرجح الجملة $\{(A, 1), (B, 1), (C, 3)\}$

(1) حل في \mathbb{C} المعادلة $z^2 - 2ia - 1 = 0$

(2) حل في \mathbb{C} المعادلة التالية ذات المجهول z :

$$(1) \dots z^2 - a(a+i)z + ia^3 = 0$$

(3) نضع $|a| = r$ و $\arg(a) = \theta$

احسب طويلة وعمدة حلي المعادلة (1) بدلالة r و θ .

(1) حل في \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$(1) \dots z^2 + (2i-1)z - 1 - i = 0$$

(2) اكتب حلول المعادلة (1) على الشكل المثلثي.

$$(3) \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة } z^3 + (2i-1)z^2 - 1 - i = 0 \dots (2)$$

$p(z)$ كثير حدود معرف كما يلي:

$$p(z) = z^3 + (7-4i)z^2 + (9-16i)z - 9 - 12i$$

(1) بين أن المعادلة $p(z) = 0$ لها حل حقيقي z_0 عينه ثم اكتب $p(z)$ على الشكل

$$(z^2 + bz + c)(z - z_0) \text{ حيث } b \text{ و } c \text{ عدنان مركبان.}$$

(2) المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) ، لتكن النقط A, B, C

لواقعها على الترتيب z_0, z_1, z_2 حلول المعادلة $p(z) = 0$ مع $|z_1| < |z_2|$

ما نوع المثلث ABC ؟

ليكن α عددا مركباً و $p_\alpha(z)$ كثير حدود معرف كما يلي:

$$p_\alpha(z) = z^3 - \bar{\alpha}z^2 + \alpha z - 1$$

(1) بين أنه إذا كانت z_0, z_1, z_2 حلولاً للمعادلة $p_\alpha(z) = 0$ فإن $z_0 z_1 z_2 = 1$

$$(2) \text{ بين أنه إذا كان } p_\alpha(z) = 0 \text{ فإن } p_\alpha\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = 0$$

(3) استنتج من السؤالين (1) و (2) أنه يوجد عدد مركب z

$$\text{بحيث } p_\alpha(z) = 0 \text{ و } |z| = 1$$

(4) نفرض أن $|\alpha| = 1$ ، حل في \mathbb{C} المعادلة $p_\alpha(z) = 0$.

$$(5) \text{ استنتج حلول المعادلة } \sqrt{2}z^4 - (1+i)z^2 + (1-i)z - \sqrt{2} = 0$$

نعتبر كثير الحدود ذو المتغير المركب z التالي $p(z) = 2z^3 + 14z^2 + 41z + 68$

$$(1) \text{ بين أنه من أجل كل } z \text{ يكون } p(z) = (z+4)(2z^2 + 6z + 17)$$

(ب) حل المعادلة $p(z) = 0$

(2) نرمز بـ z_1, z_2, z_3 إلى جذور $p(z)$

z_1 حقيقي و $\text{Im}(z_2) > 0$.

نسمي النقط A, B, C لواقع z_1, z_2, z_3 على الترتيب.

(أ) احسب $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$ ماذا يمكن القول حول المثلث ABC ؟

(ب) عين النقطتين D و E بحيث $BCDE$ مربع مركزه النقطة A .

حل في \mathbb{C} المعادلات التالية :

(1) $8z^4 - 1 = 0$ ، (ب) $z^4 + 2z^2 - 3 = 0$

(ج) $3z^4 + 2z^2 - 5 = 0$ ، (د) $-z^4 - z^2 + 2 = 0$

(1) حل في \mathbb{C} المعادلة $z^2 - 10z + 169 = 0$

(2) لتكن المعادلة $z^4 - 10z^3 + 171z^2 - 10z + 1 = 0$ (I)

(أ) بين أن المعادلة (I) تكافئ المعادلة $a\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + b\left(z + \frac{1}{z}\right) + c = 0$

حيث a, b, c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

(ب) حل في \mathbb{C} المعادلة (I).

نعتبر في \mathbb{C} المعادلة $z^4 + 7z + 24i = 0$ (I)

(1) ليكن $z_0 = 2 - i$

بين أن المعادلة (I) تكافئ المعادلة $z^4 - z_0^4 = 0$

(2) اكتب $z^4 - z_0^4$ على شكل جداء أربع كثيرات حدود من الدرجة الأولى ، ثم استنتج حلول المعادلة (I).

(3) بين أن صور الحلول في المستوي المركب هي رؤوس مربع.

نعتبر في \mathbb{C} المعادلة $z^2 - 6z + 12 = 0$ (I)

(1-أ) حل في \mathbb{C} المعادلة (I) نرمز بـ u و \bar{u} إلى حلول (I)

حيث يكون الجزء التخيلي لـ u موجبا.

(ب) احسب طولية وعمدة u ثم استنتج طولية وعمدة \bar{u} .

(2-أ) لتعتبر العدد المركب $u - 4$ اكتبه على الشكل الجبري ثم الأسّي.

(ب) احسب طولية وعمدة العدد $\frac{u}{u-4}$ ثم استنتج طولية وعمدة $\frac{\bar{u}}{u-4}$

ثم أنشئ صورة كل من u و \bar{u} .

(1) حل في \mathbb{C} المعادلة $z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$ ، نسمي هذين الحلين z_1 و z_2 مع z_1 له

جزء تخيلي موجب. اعط الشكل الأسّي لـ z_1 و z_2 .

(2) علم في المستوي المركب النقطة A ذات اللاحقة 2 ، و B و C لاحقتاهما z_1 و z_2 و I منتصف $[AB]$

(ب) برهن أن المثلث OAB متقايس الساقين ثم استنتج قياسا للزاوية (\vec{u}, \vec{OI})

(ج) احسب اللاحقة z_I للنقطة I ثم طولية z_I .

(3) استنتج مما سبق القيم المضبوطة لـ $\cos \frac{3\pi}{8}$ و $\sin \frac{3\pi}{8}$.

ليكن z عددا مركبا حيث $z = x + iy$ و \bar{z} مرافقه ولنعتبر العدد المركب

العرف كما يلي $z' = z^2 + z\bar{z} + i(z - \bar{z}) - 2i$

(1) عين (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' حقيقيا.

(2) عين (Γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' تخيليا صرفا.

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) ، من أجل

كل نقطة m ذات اللاحقة z غير العنومة ترفق النقطة M ذات اللاحقة $z' = \frac{1}{z}$

نضع $z = re^{i\theta}$

(1) اكتب z' على الشكل الأسّي.

(2) نفرض أن z'_0 عدد مركب معطى غير معنوم.

هل دائما يوجد z_0 بحيث ،

$z'_0 = \frac{1}{z_0}$ ؟ هل هو وحيد ؟

(3) نفرض في هذا السؤال أن z طوليته 1 .

(أ) إذا كانت m معطاة أنشئ M .

(ب) ما هي مجموعة النقط m بحيث $z' = z$ ؟

(4) نرمز بـ (d^*) إلى نصف المستقيم الذي يمر من O ما عدا النقطة O .

(أ) ما هي مجموعة النقط M لـ m لا تسمح (d^*) ؟

(ب) ما هي مجموعة النقط m لـ M تسمح (d^*) ؟

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد و متجانس مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) ، من أجل كل

نقطة m ذات اللاحقة z ترفق النقطة M ذات اللاحقة z' حيث ،

$z' = \frac{z^3}{2 + |z|^3}$ و $z = re^{i\theta}$ و $z' = pe^{i\alpha}$

(1) عبر عن θ و p بدلالة r و α .

(2) نرمز بـ (γ) إلى الدائرة ذات المركز O ونصف القطر 1 و T النقطة ذات اللاحقة $1-i$

(أ) ما هي مجموعة النقط M لـ m تمسح الدائرة (γ) ؟

(ب) ما هي مجموعة النقط M لـ m تمسح نصف المستقيم $[OT)$ ؟

(3) لتكن f الدالة المعرفة على $I = [0, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x^3}{2+x^3}$.

(أ) ادرس تغيرات f ثم استنتج أن f متزايدة تماما على I وأن صورة I بالدالة f هي $[0, 1]$

(ب) استنتج أنه لا تكون m نقطة كيفية من المستوي المركب، فإن النقطة M هي من قرص يطلب تعيينه.

ليكن العدد المركب $z_0 = \sqrt{2}(1+i)$

(1) عين طولية وعمدة z_0 و $\frac{1}{z_0}$.

(2) علم في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر (O, \vec{u}, \vec{v})

النقطتين H و H' ذواتا اللاحقتين على الترتيب z_0 و $\frac{1}{z_0}$.

(3) لتكن M نقطة لاحقتها z حيث $z \neq 0$ وليكن M' لاحقتها $\frac{1}{z}$ وليكن D مرجح

الجملة $\{(M, 2), (M', 1)\}$

احسب z' بدلالة z حيث D لاحقتها z'

(4) حدد وضعية D لـ $z = z_0$ ، ثم احسب z بحيث تكون D لاحقتها $\frac{1}{3}$.

(5) بين أن الإحداثيتين (x, y) للنقطة D يمكن كتابتهما على الشكل :

$x = \frac{1}{3}\left(2r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta$ و $y = \frac{1}{3}\left(2r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$ حيث r و θ طولية وعمدة z على الترتيب.

(6) ما هي مجموعة النقط D لـ M تمسح دائرة مركزها O ونصف قطرها $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر (O, \vec{u}, \vec{v})

(1) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث $\arg(z) + \arg(z-1) = \frac{\pi}{2}$

(2) هل يوجد عدد مركب يحقق الشرطين :

$\arg(z) + \arg(z-1) = \frac{\pi}{2}$ و $\arg(z) - \arg(z-1) = \theta$ مع $\theta \in [-\pi, \pi]$

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر (O, \vec{i}, \vec{j})

z عدد مركب حيث $z = x+iy$ و z' عدد مركب حيث $z' = \frac{z+i}{i^2-2}$

(1) عين وارسم (γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' حقيقيا.

(2) عين وارسم (γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' تخيليا صرعا.

(3) عين وارسم (γ_3) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون :

$$k \in \mathbb{Z} \text{ و } \arg(z') = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

(4) عين مجموعة النقط ذات اللاحقة z بحيث $z' = z$.